

Kombinatorická pravdepodobnosť (opakovanie)

Metódy riešenia úloh
z pravdepodobnosti a štatistiky

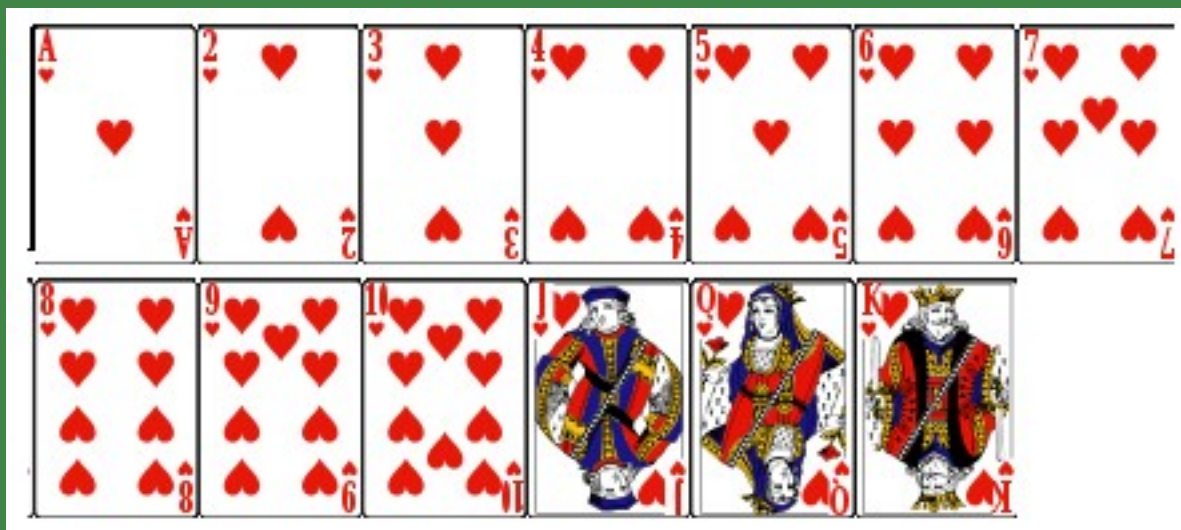
Beáta Stehlíková, FMFI UK Bratislava

www.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova



Príklad 1: Zhody kariet

- ♦ Zoberieme karty jednej farby:



- ♦ Zamiešame.



Príklad 1: Zhody kariet

- Po jednom ich otáčame, pričom súčasne hovoríme nasledovné poradie kariet:

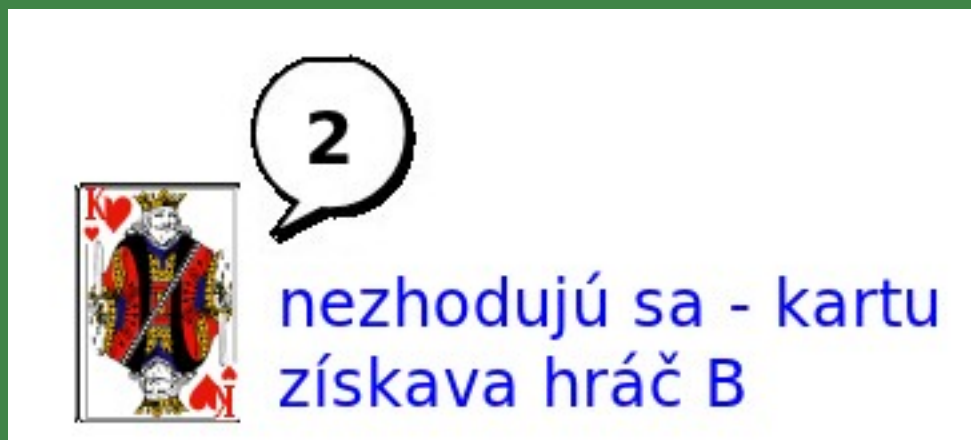
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A

- Ak nastane zhoda medzi vyloženou a vyslovenou kartou, kartu získava hráč A. Inak ju získava hráč B.
- Vyhráva ten, kto má na konci viac kariet.



Príklad 1: Zhody kariet

- ♦ Príklad priebehu hry:
 - ♦ Povieme „2“ a otočíme prvú kartu.
 - ♦ Napríklad:



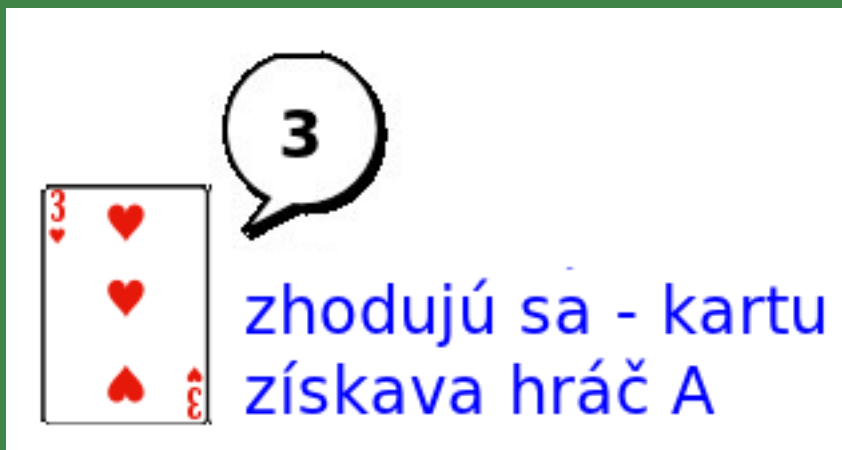
2

nezhodujú sa - kartu
získava hráč B



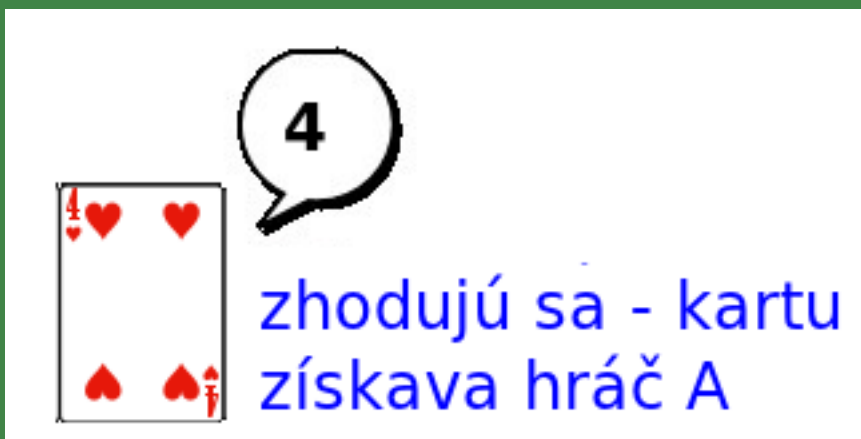
Príklad 1: Zhody kariet

- ♦ Príklad priebehu hry – pokračovanie:
 - ♦ Povieme „3“ a otočíme ďalšiu kartu.
 - ♦ Napríklad:



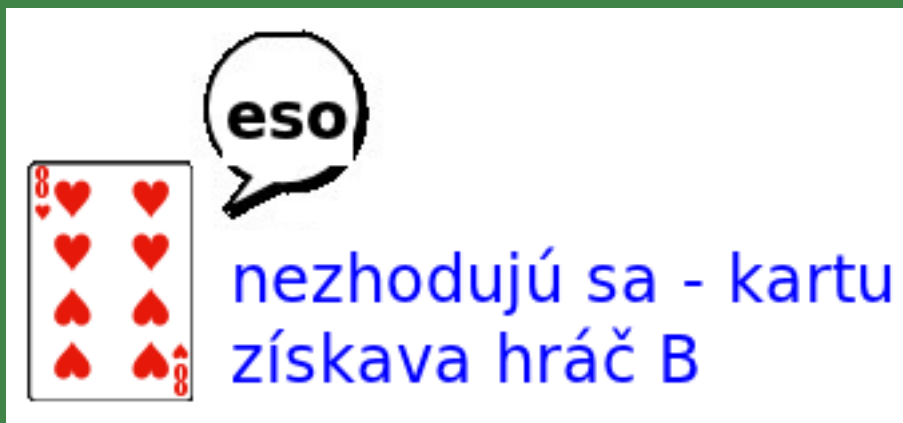
Príklad 1: Zhody kariet

- ♦ Príklad priebehu hry – pokračovanie:
 - ♦ Povieme „4“ a otočíme ďalšiu kartu.
 - ♦ Napríklad:



Príklad 1: Zhody kariet

- ♦ Príklad priebehu hry – pokračovanie:
 - ♦ Rovnako pokračujeme ďalej.
 - ♦ Nakoniec teda povieme „eso“ a otočíme poslednú kartu.
 - ♦ Napríklad:



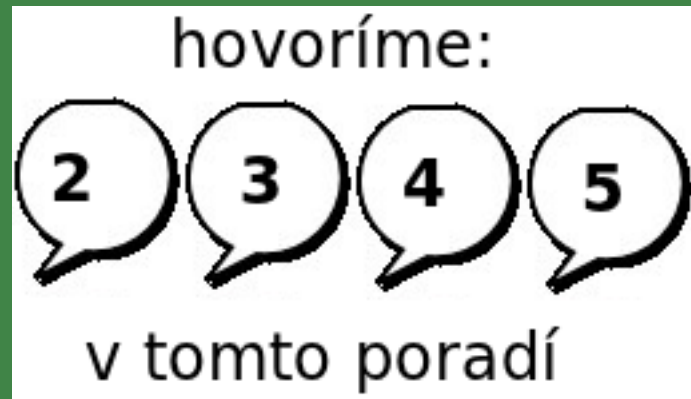
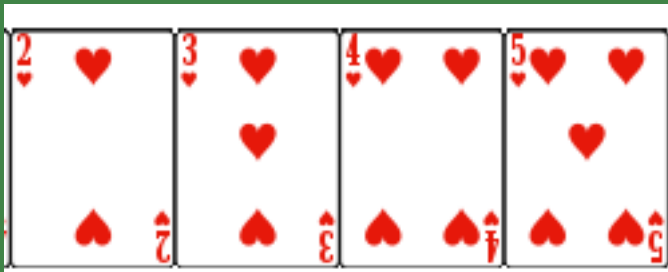
Príklad 1: Zhody kariet

- Je hra spravodlivá, t. j. majú hráči rovnakú pravdepodobnosť výhry?
- Zahráme si skrátenú verziu hry – so štyrmi kartami



Príklad 1: Zhody kariet

- ♦ Skrátená verzia hry – so štyrmi kartami



- ♦ Pre každú odohranú hru zapíšte do tabuľky počet kariet, ktorý získali jednotliví hráči



Príklad 1: Zhody kariet

- Teraz vypočítame pravdepodobnosť, že hráč A vyhrá.
- Doplňte tabuľku pre všetky možné poradia kariet:

poradie kariet				hráč A	hráč B	víťaz
2	3	4	5	4	0	A
2	3	5	4	2	2	X
2	4	3	5	2	2	X
2	4	5	3	1	3	B
2	5	3	4			

- Aká je pravd., že hráč A má na konci hry 0, 1, 2, 3, 4 karty?



Príklad 1: Zhody kariet

- ♦ Modifikácia hry – hráč získava toľko bodov, koľko má kariet – aká je stredná hodnota počtu bodov hráča A?
- ♦ Čo sa zmení, ak zoberieme:
 - ♦ všetky karty?
 - ♦ sedmové karty?
 - ♦ jednu sadu zo „všeobecného balíčka“, ktorý má karty typu 1, 2, ..., N?



Príklad 1: Zhody kariet

- ♦ Súčasť DÚ: simulácie tejto hry na stránke <https://bs81.shinyapps.io/zhody>, kde zadávame počet kariet a počet opakovaní:

Parametre

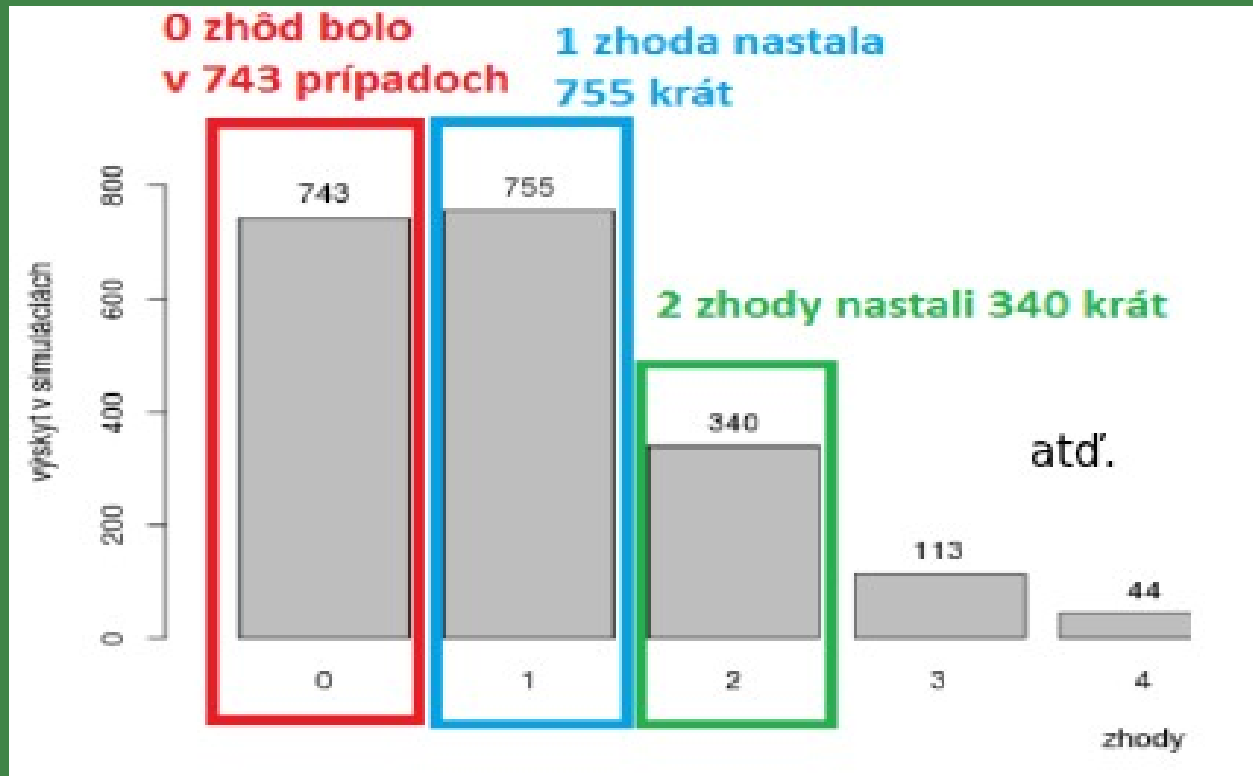
Karty: 8 kariet (napr. sedmové karty)

Opakovania: hru opakujeme 2000 krát



Príklad 1: Zhody kariet

- Simulácie na stránke – ukážka výstupu:



Príklad 2: Rozcvička

- ♦ Zamiešame balíček kariet (hodnoty 2, 3, ..., 10, ..., A; farby ♠, ♣, ♥, ♦)
- ♦ Každé z $52!$ možných usporiadaní kariet je rovnako pravdepodobné
- ♦ Zamiešanie s určitou vlastnosťou (napr. „prvé dve karty sú esá“) má pravdepodobnosť m/n , kde
 - ♦ m = počet priaznivých možností
 - ♦ n = počet všetkých možností ($52!$)



Príklad 2: Rozcvička



Kto nájde súvislosť obrázku s otázkami? ;-)

- ♦ Aká je pravdepodobnosť nasledujúcich udalostí?
 - ♦ Prvá karta je piková dáma.
 - ♦ Prvá karta je eso.



Príklad 2: Rozcvička

- ♦ Aká je pravdepodobnosť týchto udalostí?
 - ♦ Prvá karta je srdcové eso a druhá karta je piková.
 - ♦ Prvé tri karty sú srdcové
 - ♦ Prvá aj posledná karta je dvojka.
 - ♦ Všetky desiatky sú na nepárnych pozíciách (prvé, tretie, piate, ... miesto v balíčku).
 - ♦ Všetky pikové karty sú v súvislom bloku.



Príklad 2: Rozcvička

- ♦ Z balíčka kariet náhodne vytiahneme dve karty (nezáleží nám na poradí vytiahnutia).
- ♦ Každá dvojica má rovnakú pravdepodobnosť
- ♦ Výber s určitou vlastnosťou má pravdepodobnosť m/n , kde
 - ♦ m = počet priaznivých možností
 - ♦ n = počet všetkých možností, čo je $52 \cdot 51 / 2$



Príklad 2: Rozcvička

- ♦ Aká je v tejto situácii pravdepodobnosť nasledujúcich udalostí?
 - ♦ Obidve karty sú esá.
 - ♦ Obidve karty majú rovnakú hodnotu.
- ♦ Z balíčka kariet náhodne vytiahneme dve karty (teraz záleží aj na poradí vytiahnutia).
 - ♦ Aká je pravdepodobnosť, že prvá karta je eso, ale druhá nie je?



Príklad 3: Rovnaké farby

- ♦ Máme n čiernych a n červených kariet.
- ♦ Náhodne vyberieme dve karty. Hráč vyhráva, ak majú rovnakú farbu.
- ♦ Môžete si vybrať n medzi 2 (2 červené a dve čierne) a 26 (celý balíček).
- ♦ Určte pravdepodobnosť výhry.
- ♦ Ako si vybrať n ?



Príklad 4: Kde sú esá?

- ♦ Znovu karty 2, 3, ..., A
- ♦ Aká je pravdepodobnosť toho, že prvé eso je na k -tom mieste?
 - ♦ Možné hodnoty k sú 1, 2, ..., 49
 - ♦ Aké sú ich pravdepodobnosti?
- ♦ Aká je pravd. toho, že posledné eso je na k -tom mieste?
 - ♦ Možné hodnoty k sú 4, 5, ..., 52
 - ♦ Aké sú ich pravdepodobnosti?



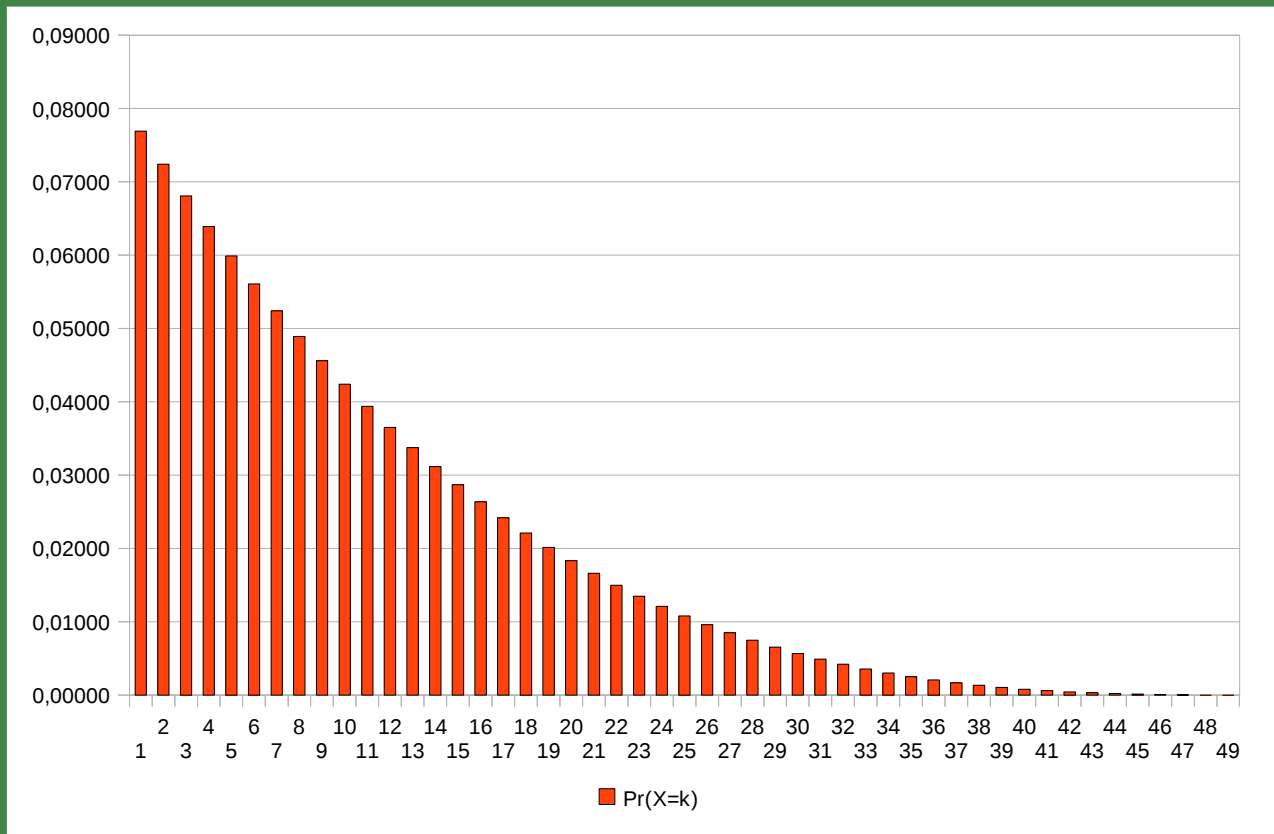
Príklad 4: Kde sú esá?

- ♦ „Začiatkové nadšenie“
 - ♦ Otáčame karty, kým nenájdeme prvé eso
 - ♦ X = miesto, na ktorom je prvé eso
 - ♦ Ktorá hodnota náhodnej premennej X má najväčšiu pravdepodobnosť?



Príklad 4: Kde sú esá?

- ♦ X = miesto, na ktorom je prvé eso



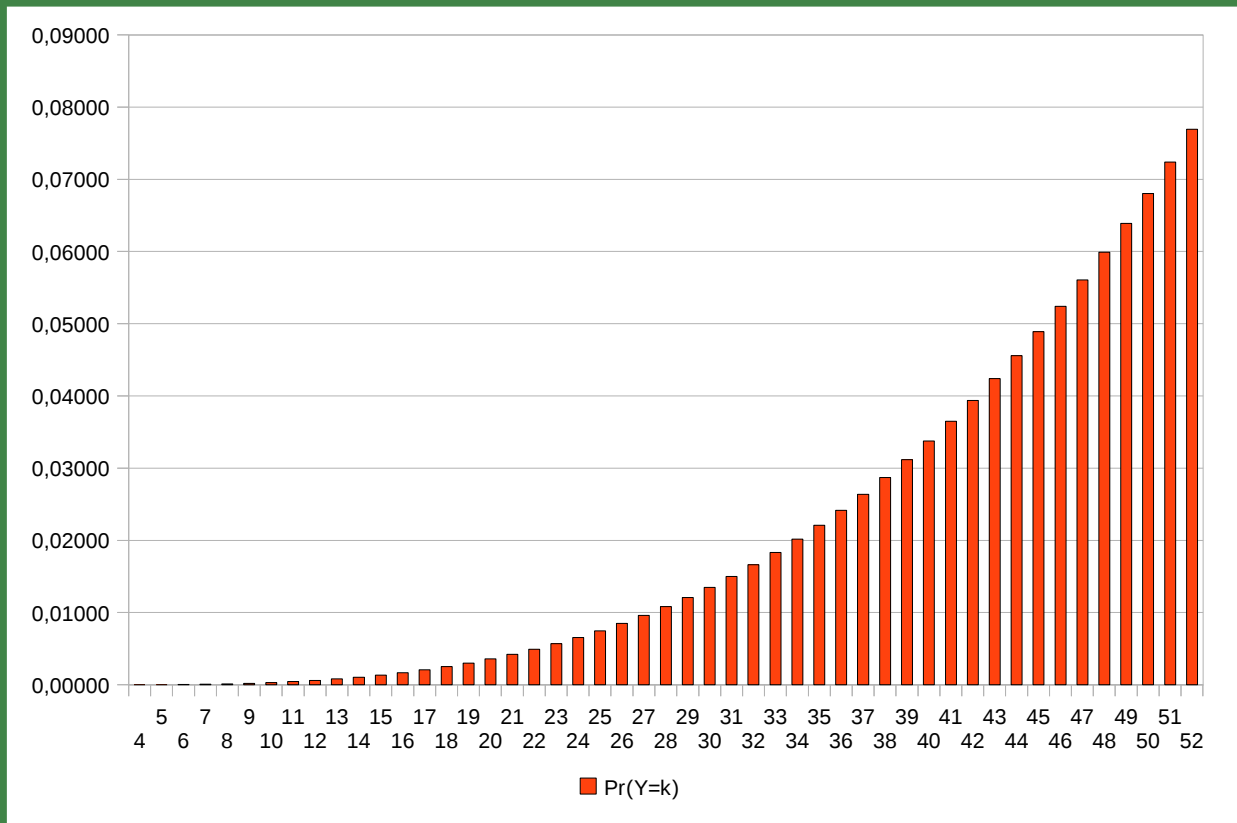
Príklad 4: Kde sú esá?

- ♦ „Zákon schválnosti“
 - ♦ Otáčame karty, kým nenájdeme všetky esá
 - ♦ Y = miesto, na ktorom je posledné eso
 - ♦ Ktorá hodnota náhodnej premennej Y má najväčšiu pravdepodobnosť?



Príklad 4: Kde sú esá?

- ◆ Y = miesto, na ktorom je posledné eso



Budúci týždeň: spoločný bonus

- ♦ Dostanete 10 červených a 10 čiernych kariet
- ♦ Rozdelíte ich do dvoch obálok – *dohodnute sa, ako*
- ♦ Náhodne sa vyberie jedna z obálok a potom z nej náhodne jedna karta
- ♦ Ak bude čierna, získa každý prítomný 5 bonusových bodov



Ďalšie cvičenia



Cvičenie 1: Zelené kura a mince

- Súťaž *Green chicken* medzi Williams College a Middlebury College v USA s putovnou cenou pre víťaza:



Cvičenie 1: Zelené kura a mince

- ♦ Príklad zo súťaže:

Problem #4 (1988 Green Chicken Contest): *Show that it is impossible to weight two coins so that the probability of the three outcomes, two heads, a tail and a head, or two tails are all equally likely.*

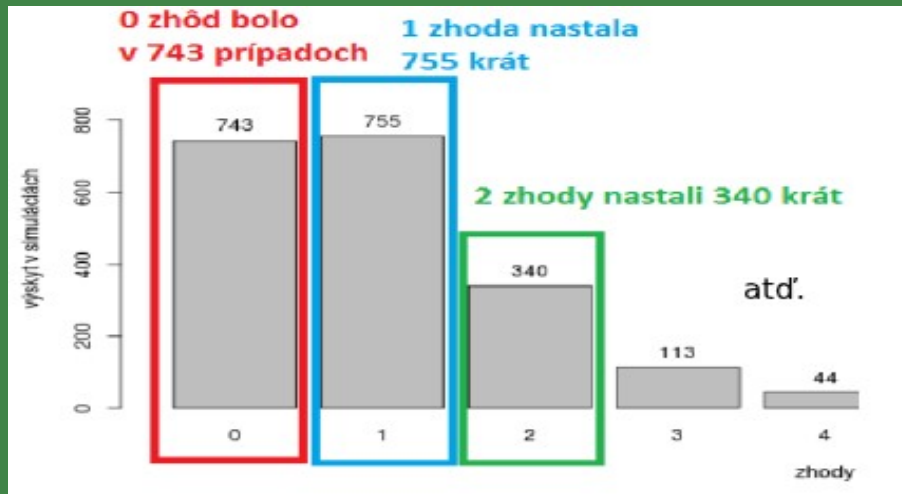
- ♦ Poznámky:

- ♦ Vieme vyrobiť nevyváženú mincu so zadanou pravdepodobnosťou padnutia hlavy
- ♦ *Weight a coin* znamená určiť túto pravdepodobnosť, pričom môže byť rôzna pre každú mincu



Cvičenie 2: Zhody kariet II.

- ♦ Vráťte sa k simuláciám a vypočítajte výberovú disperziu počtu zhôd pre danú simuláciu (niekoľkokrát a pre rôzne počty kariet).



- ♦ Potom nájdite disperziu počtu zhôd ako náhodnej premennej



Cvičenie 3: Fotoaparáty

- Medzi 20 fotoaparátov sa zamiešali 3 pokazené, ich umiestnenie je náhodné.
- Kontrolujeme ich jeden za druhým.
- Nech X je poradie, na ktorom sa nachádza posledný pokazený fotoaparát.
- Aké hodnoty môže nadobúdať náhodná premenná X a aké sú ich pravdepodobnosti?



Cvičenie 3: Fotoaparáty

- ♦ Uvedomme si teraz, že na nájdenie pokazených fotoaparátov nikdy nemusíme skontrolovať všetkých 20, napríklad:
 - ♦ ak je na 10 mieste už tretí pokazený – máme ich už všetky
 - ♦ ak sme medzi prvými 19 našli len dva pokazené, ten tretí je na 20. mieste
 - ♦ ak sme medzi prvými 17 nenašli žiadny pokazený, pokazené sú na miestach 18, 19, 20



Cvičenie 3: Fotoaparáty

- ♦ Nech Y je počet fotoaparátov, ktoré musíme skontrolovať, aby sme vedeli identifikovať tie pokazené (možné hodnoty sú 3, 4, . . . , 19).
- ♦ Vysvetlite, prečo $P(Y = k) = P(X = k)$ pre $k = 3, 4, . . . , 16$
- ♦ Určte $P(Y=17)$, $P(Y=18)$, $P(Y=19)$
- ♦ Ktorá hodnota Y má najväčšiu pravdepodobnosť?



Cvičenie 4: Newton a Pepys



- ♦ Isaac Newton (1642 – 1727)
- ♦ Samuel Pepys (1633 – 1703)



Cvičenie 4: Newton a Pepys

- ♦ Z ich korešpondencie: hráč hádže kockami
 - ♦ pri hode šiestimi kockami chce hodiť aspoň jednu šestku
 - ♦ pri hode dvanástimi kockami chce hodiť aspoň dve šestky
 - ♦ pri hode osemnástimi kockami chce hodiť aspoň tri šestky
- ♦ Ktorá možnosť má najväčšiu pravdepodobnosť?

