

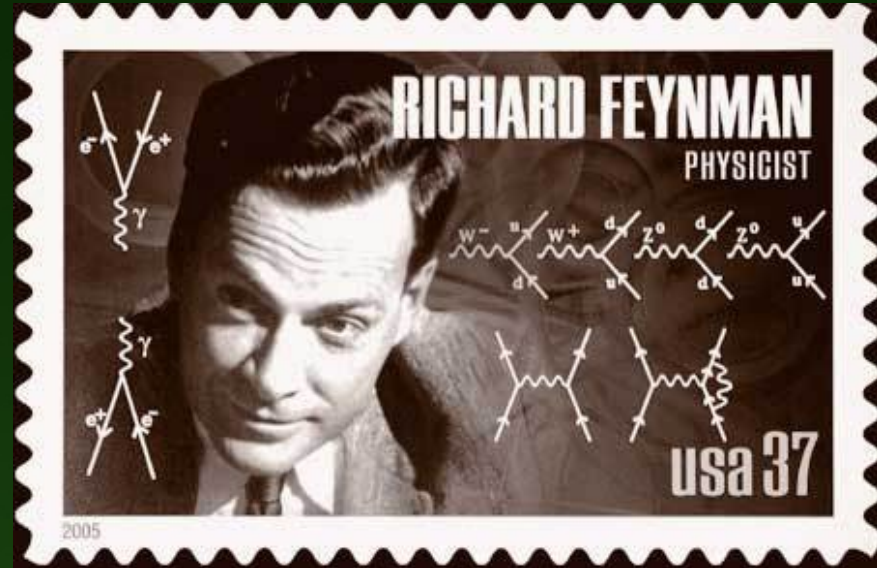
# Podmienená pravdepodobnosť (opakovanie)

Metódy riešenia úloh  
z pravdepodobnosti a štatistiky



# Príklad 1: Hra s kockami *craps*

- ♦ Richard Feynmann (1918 – 1988)
- ♦ Spomína, že keď bol po prvýkrát v Las Vegas, spočítal si pravdepodobnosť výhry v jednotlivých hrách
- ♦ Konkrétne: „... zistil som, že pre stoly, kde sa hrali kocky, to bolo niečo ako 0,493.“



# Príklad 1: Hra s kockami *craps*

- ♦ V poznámke pod čiarou sa dozvieme, aká hra to bola – tzv. *craps* - a jej pravidlá:
  - ♦ Hráč hádže dvoma kockami.
  - ♦ Ak padne súčet 7 alebo 11, hráč vyhráva.
  - ♦ Ak padne súčet 2, 3 alebo 12, hráč prehráva.
  - ♦ Inak hádže ďalej, až kým padne:
    - ★ súčet 7 – vtedy prehráva
    - ★ ten istý súčet ako v prvom kole – vyhráva



# Príklad 1: Hra s kockami *craps*

- ♦ Súčty, ktoré môžu padnúť na 2 kockách:

Names of Rolls in Craps

	1	2	3	4	5	6
1	Snake Eyes	Ace Deuce	Easy Four	Five (Fever Five)	Easy Six	Natural or Seven Out
2	Ace Deuce	Hard Four	Five (Fever Five)	Easy Six	Natural or Seven Out	Easy Eight
3	Easy Four	Five (Fever Five)	Hard Six	Natural or Seven Out	Easy Eight	Nine (Nina)
4	Five (Fever Five)	Easy Six	Natural or Seven Out	Hard Eight	Nine (Nina)	Easy Ten
5	Easy Six	Natural or Seven Out	Easy Eight	Nine (Nina)	Hard Ten	Yo (Yo-leven)
6	Natural or Seven Out	Easy Eight	Nine (Nina)	Easy Ten	Yo (Yo-leven)	Boxcars or Midnight

1+1 ~ *snake eyes*

2+2 ~ two-two ~ tutu ~ *ballerina*



# Príklad 1: Hra s kockami *craps*

- ♦ Vypočítame pravdepodobnosť prehry.
- ♦ Základná myšlienka – rozdelíme výpočet podľa prvého súčtu:

$$\begin{aligned} P(\text{prehra}) &= P(\text{prehrá hneď}) \\ &+ P(\text{prehrá}|\text{padla 4}) \times P(\text{padla 4}) \\ &+ P(\text{prehrá}|\text{padla 5}) \times P(\text{padla 5}) \\ &+ P(\text{prehrá}|\text{padla 6}) \times P(\text{padla 6}) \\ &+ P(\text{prehrá}|\text{padla 8}) \times P(\text{padla 8}) \\ &+ P(\text{prehrá}|\text{padla 9}) \times P(\text{padla 9}) \\ &+ P(\text{prehrá}|\text{padla 10}) \times P(\text{padla 10}) \end{aligned}$$



# Príklad 1: Hra s kockami *craps*

- ♦ Vypočítame pravdepodobnosť prehry.
- ♦ Základná myšlienka – rozdelíme výpočet podľa prvého súčtu:

$$\begin{aligned} P(\text{prehra}) &= P(\text{prehrá hneď}) \\ &+ P(\text{prehrá}|\text{padla 4}) \times P(\text{padla 4}) \\ &+ P(\text{prehrá}|\text{padla 5}) \times P(\text{padla 5}) \\ &+ P(\text{prehrá}|\text{padla 6}) \times P(\text{padla 6}) \\ &+ P(\text{prehrá}|\text{padla 8}) \times P(\text{padla 8}) \\ &+ P(\text{prehrá}|\text{padla 9}) \times P(\text{padla 9}) \\ &+ P(\text{prehrá}|\text{padla 10}) \times P(\text{padla 10}) \end{aligned}$$



# Príklad 2: Hra s kockami *craps*

- ♦ Profesionálny hráč“ Nick vysvetľuje, ako na tejto hre zarába:

*Postávam okolo stola a nejaký chlap povie: „Padne deviatka. Naisto to bude deviatka.“ (...) Lenže ja poznám pravdepodobnosť pre všetky čísla naspamäť, aj keby ste ma zobudili o polnoci, takže mu poviem: „Vsadím sa s vami štyri ku trom, že to deviatka nebude,“ a dlhodobo vyhrávam.*

Aká je stredná hodnota jeho výhry?



# Poznámka

- ♦ Príklad je prevzatý z bakalárskej práce Martiny Ďuratnej: **Motivačné príklady k predmetom matematického základu (EFM, 2011)**

<http://www.iam.fmph.uniba.sk/efm/bakalarky/2011/duratna/bakalarka.pdf>

Ďalší príklad z pravdepodobnosti – z koľkých čísel sa žrebuje lotéria v Springfielde?





# Príklad 3: Zabudnutý dáždnik

- ♦ Roztržitý profesor matematiky
  - ♦ Zabúda v obchode dáždnik s pravd.  $1/4$
  - ♦ Vyšiel z domu s dáždnikom, bol v troch obchodoch a vrátil sa domov bez dáždnika.
- ♦ Aká je pravdepodobnosť, že si dáždnik zabudol v  $i$ -tom obchode ( $i = 1, 2, 3$ )? Pre ktoré  $i$  je táto pravdepodobnosť najvyššia?



# Príklad 4: Mince

- ♦ 65 mincí:
  - ♦ 64 pravidelných
  - ♦ jedna falošná - na oboch stranách má znak
- ♦ Náhodne vybranou mincu hráč hodil 6-krát a v každom z týchto pokusov padol znak.
- ♦ Aká je pravdepodobnosť, že je to tá falošná minca? (Predpokladáme, že nemáme možnosť „podozrivú“ mincu skontrolovať.)



# Príklad 5: Zo súdnej siene

- ♦ People vs. Collins
  - ♦ Starší človek v Los Angeles (1968) bol okradnutý, páchatelia boli opísaní ako čierny muž s bradou a fúzami a biela žena s blond vlasmi zopnutými v cope, ktorí odišli v žltom aute.
  - ♦ Neskôr zatkli dvojicu, ktorá vyhovovala tomuto popisu.



# Príklad 5: Zo súdnej siene

- ◆ People vs. Collins - pokračovanie

- ◆ Prokurátor:

- ◆ Majme tieto pravdepodobnosti:

partly yellow automobile	1/10
man with mustache	1/4
girl with ponytail	1/10
girl with blond hair	1/3
black man with beard	1/10
interracial couple in car	1/1000.

- ◆ Ak sú nezávislé, tak pravdepodobnosť toho, že dvojica má tieto vlastnosti je 1/12 000 000, čo označil za „matematický dôkaz ich viny“

- ◆ Porota ich uznala vinnými



# Príklad 5: Zo súdnej siene

- ◆ People vs. Collins - pokračovanie
  - ◆ Odvolanie, Najvyšší súd Kalifornie
    - ◆ Uvedené pravdepodobnosti nemajú žiadny podklad
    - ◆ Nebola zdôvodnená nezávislosť vlastností (a zrejme neplatí)
    - ◆ Použitie pravdepodobnosti bolo nesprávne.



# Príklad 5: Zo súdnej siene

- ◆ People vs. Collins - pokračovanie
  - ◆ Prijmime predpoklad, že je  $p = 1 / 12\,000\,000$  a  $12\,000\,000$  možných dvojíc (na základe populácie LA) - aká je pravdepodobnosť, že existuje ďalšia taká dvojica, za podmienky že aspoň jedna taká dvojica existuje (páchatelia)?



# Príklad 5: Zo súdnej siene

- ◆ People vs. Collins - pokračovanie
- ◆ Odvolanie, Najvyšší súd Kalifornie
  - ◆ Uvedený výpočet (nachádza sa aj v prílohe rozhodnutia súdu) + problémy s pôvodným výpočtom
  - ◆ Zmenil pôvodný rozsudok súdu
  - ◆ Ale stalo sa tak až po určitom čase vo väzení

People v. Collins, 68 Cal. 2d 319 - Cal: Supreme Court 1968

[http://scholar.google.com/scholar\\_case?case=2393563144534950884](http://scholar.google.com/scholar_case?case=2393563144534950884)



# Príklad 6: Poistenie auta

- ♦ O klientoch poisťovne vieme:
  - ♦ Každý má poistené aspoň jedno auto
  - ♦ 70% má poistené viac ako jedno auto
  - ♦ 20% má poistené športové auto
  - ♦ Z tých, ktorí majú poistené viac ako jedno auto, 15% má poistené športové auto
- ♦ Náhodne vyberieme jedného klienta.





# Príklad 6: Poistenie auta

- ♦ Vypočítajte pravdepodobnosť, že tento vybraný klient má poistené práve jedno auto a toto auto nie je športové.



# Ďalšie cvičenia



# Cvičenie 1: Poist'ovňa

- ♦ 10% klientov patrí medzi rizikových, 90% medzi málo rizikových
- ♦ Počet poistných udalostí u klienta za rok má Poissonovo rozdelenie s parametrom:
  - ♦ 0,6, ak patrí medzi rizikových klientov
  - ♦ 0,1, ak je patrí medzi málo rizikových



# Cvičenie 1: Poist'ovňa

- ♦ Vypočítajte strednú hodnotu poistných udalostí klienta za rok, ak mal v predchádzajúcom roku jednu poistnú udalosť.



# Cvičenie 2: Stávky v hre *craps*

- ♦ Zaoberajme sa znovu hrou *craps* z príkladu 1
- ♦ Počas hry sa dajú robiť rôzne stávky:

The diagram illustrates the layout of a craps table with various betting areas and odds. The table is green with white and red text and markings.

**Main Betting Areas:**

- Don't Come Bar:** Located at the top left, with dice icons (two 6s).
- 4 5 SIX 8 NINE 10:** A row of numbers for betting.
- COME:** A large red area in the center.
- FIELD:** A yellow area below COME, containing the numbers 2, 3, 4, 9, 10, 11, and 12.
- Don't Pass Bar:** Located below the FIELD, with dice icons (two 6s).
- PASS LINE:** A large area at the bottom.
- 6 and 8:** Red numbers on the left side of the table.

**Odds Table:**

5 to 1	SEVEN	5 to 1
10 to 1		8 to 1
10 to 1		8 to 1
16 to 1	31 to 1	31 to 1
16 to 1		16 to 1
8 to 1	ANY CRAPS	8 to 1

**Labels on the left side of the table:**

- PASS LINE:** Vertical label on the far left.
- Don't Pass Bar:** Vertical label on the left side.



# Cvičenie 2: Stávky v hre *craps*

- ♦ Jednou zo stávok je *Don't pass bar* - stávka na to, že hráč prehrá, s výnimkou toho, že prehrá kvôli dvom šestkám (preto tie dve šestky pri názve stávky)

*Don't Pass Bar* 



# Cvičenie 2: Stávky v hre *craps*

- ♦ Pravidlá teda sú:
  - Ak hráč prehrá kvôli tomu, že hodil dve šestky, pre našu stávku to znamená remízu.
  - Ak hráč prehrá iným spôsobom, my našu stávku vyhrávame.
  - Ak hráč vyhrá, my prehrávame.
  - Ak vyhráme, získame 1 USD. Ak prehráme, strácame 1 USD. Pri remíze je platba nulová.

Aká je stredná hodnota výhry?



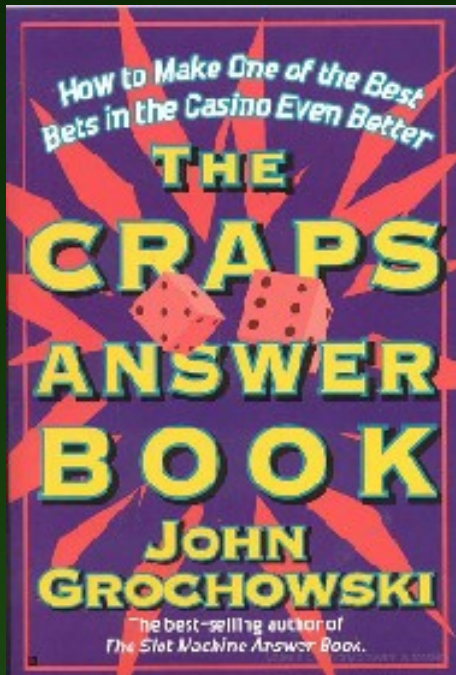
# Cvičenie 3: Dĺžka hry *craps*

- ♦ Nájdite pravdepodobnostné rozdelenie náhodnej premennej  $N$ , ktorá označuje počet hodov, ktoré treba spraviť, kým sa rozhodne o výhre/prehre v hre *craps* (t. j. možné hodnoty a ich pravdepodobnosti).
- ♦ Nájdite strednú hodnotu tejto náhodnej premennej.





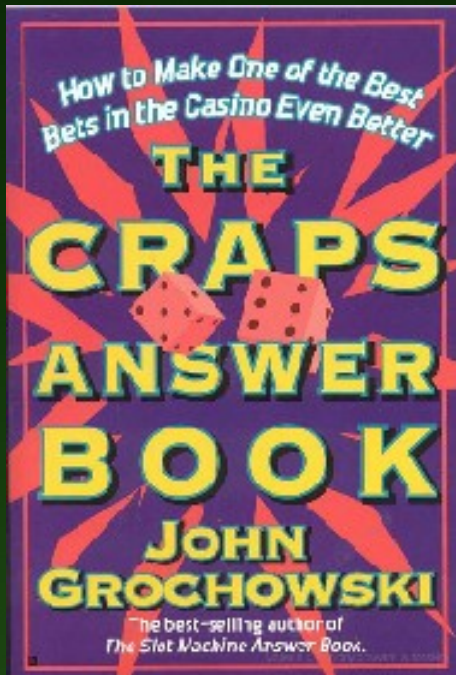
# Cvičenie 4: „*Crapless craps*“



- ♦ Jedna z kapitol - odpovede na otázky čitateľov, medzi nimi je takáto modifikácia hry *craps*:
  - ♦ Hráč hádže dvoma kockami.
  - ♦ Ak padne súčet 7, hráč vyhráva.
  - ♦ Inak hádže ďalej, až kým padne:
    - ♦ súčet 7 – v tom prípade prehráva
    - ♦ ten istý súčet ako v prvom kole - v tom prípade vyhráva



# Cvičenie 4: „Crapless craps“



- ♦ Ako to vyzerá:
  - ♦ Odpadá možnosť okamžitej prehry
  - ♦ Ale zato pri súčte 11 nevyhrávame hneď, ale musíme pokračovať
- ♦ Autor knihy odpovedá:

*The game sounds like a great deal until you take a hard look on it.*
- ♦ Vypočítajte pravd. výhry v tejto hre.





<http://www.casinotop10.net/cartoon-casino-worker>

