

Studentove t-testy



Metódy riešenia matematických úloh
www.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova

Jednovýberový t-test z prednášky

- Máme náhodný výber z normálneho rozdelenia s neznámymi parametrami
- Chceme testovať hypotézu, že stredná hodnota sa rovná zadanej konštante.
- Intuícia:
 - Hypotézu zamietneme, ak sa priemer bude príliš líšiť od testovanej strednej hodnoty



Jednovýberový t-test z prednášky

- Vypočítame hodnotu štatistiky

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{N}}$$

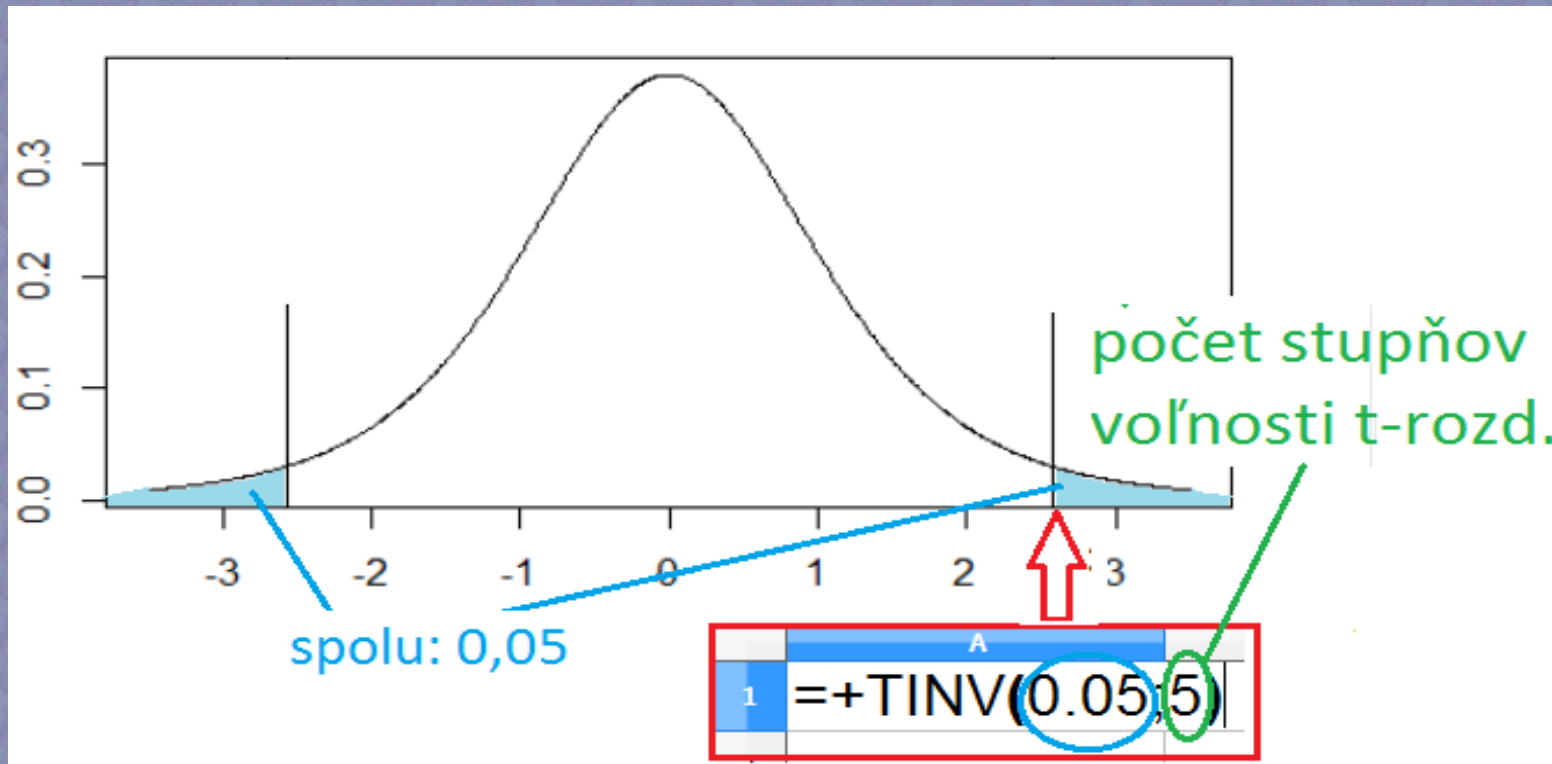
kde S je výberová štandardná odchýlka a N je počet dát

- Nulovú hypotézu zamietame, ak je štatistika v absolútnej hodnote väčšia ako kvantil t rozdelenia s $N-1$ stupňami voľnosti



Jednovýberový t-test z přednášky

- Výpočet kvantilu:



Príklad 1: Index telesnej hmotnosti

- *Česká antropologie* - časopis vydávaný Českou antropologickou společností
- Konkrétne jeden z článkov z roku 2014:

Česká antropologie
ČESKÁ
ANTRO
POLOGIE
antropologická



Somatický profil probandů baletního souboru Brna a Olomouce
Somatic profile in ballet dancers from Brno a Olomouc
Monika Cinařová, Miroslava Přidalová

Príklad 1: Index telesnej hmotnosti

- Index telesnej hmotnosti (body mass index, BMI):

$$\text{BMI} = \frac{m}{h^2},$$

kde

- m — telesná hmotnosť v kilogramoch
- h — telesná výška v metroch



Príklad 1: Index telesnej hmotnosti

- V článku:

vala priemerná hmotnosť 70,2 kg a výška 177,8 cm. Priemerné hodnoty BMI byly u žen na hranici normální hmotnosti a podváhy, u mužů se pohybovaly v oblasti normální hmotnosti. Metabolismus žen odrazil 1286,8 kcal a u mužů 1727,4 kcal

- Spomínaná hraničná hodnota je 18,50 (WHO, World Health Organization):

Table 1: The International Classification of adult underweight, overweight and obesity according to BMI

| Classification | BMI(kg/m ²) | |
|---------------------|--------------------------|---------------------------|
| | Principal cut-off points | Additional cut-off points |
| Underweight | <18.50 | <18.50 |
| Severe thinness | <16.00 | <16.00 |
| Moderate thinness | 16.00 - 16.99 | 16.00 - 16.99 |
| Mild thinness | 17.00 - 18.49 | 17.00 - 18.49 |
| Normal range | 18.50 - 24.99 | 18.50 - 22.99 |
| | | 23.00 - 24.99 |
| Overweight | >25.00 | >25.00 |

Príklad 1: Index telesnej hmotnosti

- Máme tvrdenie o BMI hranici 18,50:

vala priemerná hmotnosť 70,2 kg a výška 177,8 cm. Priemerné hodnoty BMI byly u žen na hranici normální hmotnosti a podváhy, u mužů se pohybovaly v oblasti normální hmotnosti. Me-

- Štatisticky: ak budeme testovať hypotézu, že stredná hodnota BMI je 18,50, tak
 - pre mužov by sme ju mali zamietnuť
 - pre ženy by sme ju nemali zamietnuť



Príklad 1: Index telesnej hmotnosti

- V článku máme dáta pre 17 mužov a 30 žien:

Tabulka 1. Základní statistické charakteristiky vybraných somatických parametrů

| Parametr | Muži | | Ženy | |
|--------------------------|--------|-------|--------|------|
| | M | SD | M | SD |
| Věk (v letech) | 23,1 | 3,3 | 23,8 | 3,6 |
| Hmotnost (kg) | 70,2 | 6,9 | 50,4 | 4,3 |
| Tělesná výška (cm) | 177,8 | 6,4 | 164,4 | 4,6 |
| BMI (kg/m ²) | 22,2 | 1,2 | 18,6 | 1,3 |
| BMR (kcal) | 1749,4 | 130,1 | 1286,8 | 72,8 |

Poznámka: M – aritmetický průměr; SD – směrodatná odchylka; BMI – index tělesné hmotnosti (kg/m²); BMR – bazální metabolismus (kcal)



Príklad 1: Index telesnej hmotnosti

- Náhodná premenná: BMI muža v baletnom súbore
- Testujeme hypotézu, že jej stredná hodnota sa rovná 18,50
- Použite t-test na testovanie tejto hypotézy
- Potom zopakujte pre ženy.



Príklad 2: Odtlačky



- Odtlačok chodidla alebo topánky
- Ako na základe neho odhadnúť výšku človeka?



Príklad 2: Odtlačky



- Topinard, polovica 19. storočia: dĺžka chodidla v priemere predstavuje 15 percent výšky
- Dá sa táto hodnota použiť aj dnes?



Príklad 2: Odtlačky



- Brenda M. A. Rohren,
Nebraska Wesleyan
University
 - merania, ktoré použijeme na
testovanie tejto hypotézy



Príklad 2: Odtlačky

- Merania pre 21 žien a 19 mužov v tvare:

| Person | Sex | Age | Race/Ethnicity | Height | Length of Footprint | Length of Shoeprint | Stated Shoe Size | Shoe Size at Age of | Foot Length % of Stature | Shoe Length % of Stature |
|--------|-----|-----|----------------|--------|---------------------|---------------------|------------------|---------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1 | F | 47 | Caucasian | 165.10 | 23.18 | 24.77 | 7 | 11 | 14.04 | 15.00 |
| 2 | F | 19 | Caucasian | 166.37 | 24.29 | 28.58 | 9 | 14 | 14.60 | 17.18 |
| 3 | F | 20 | Caucasian | 177.80 | 26.04 | 25.40 | 10 | 16 | 14.64 | 14.29 |
| 4 | F | 27 | Caucasian | 167.64 | 23.81 | 26.67 | 8 | 16 | 14.20 | 15.91 |
| 5 | F | 19 | Caucasian | 168.28 | 25.09 | 26.67 | 9 | 14 | 14.91 | 15.85 |

- Čo nás zaujíma:

| | Females | Males | All | |
|--------|---------|-------|-------|--|
| min | 13.27 | 14.29 | 13.27 | |
| max | 15.87 | 16.03 | 16.03 | |
| mean | 14.51 | 14.96 | 14.73 | ← H_1 : Foot Length / Stature \neq 15% |
| median | 14.52 | 14.79 | 14.65 | H_0 : Foot Length / Stature = 15% |
| mode | 14.20 | 15.07 | 14.20 | |
| stdev | 0.66 | 0.51 | 0.63 | |

- Testujte hypotézu o hodnote 15%.



Príklad 2: Odtlačky

- Pre podiel veľkosti topánky a výšky našla autorka v literatúre hodnotu 17 percent
- Jej merania:

| | Females | Males | All | |
|--------|---------|-------|-------|--|
| min | 14.29 | 15.99 | 14.29 | |
| max | 17.50 | 18.12 | 18.12 | |
| mean | 16.16 | 17.14 | 16.63 | ← H_2 : Shoe Length / Stature \neq 17% |
| median | 15.91 | 17.21 | 16.86 | H_0 : Shoe Length / Stature = 17% |
| mode | 16.92 | 17.91 | 16.92 | |
| stdev | 0.83 | 0.60 | 0.87 | |

- Testujte hypotézu o hodnote 17%.



Párový t test

- Predchádzajúci test
 - Jednovýberový
 - Lebo sme mali jeden výber – jednu náhodnú premennú, ktorej strednú hodnotu sme testovali
- Párový t test
 - Dvojvýberový - dve premenné, budeme porovnávať ich stredné hodnoty
 - Párový – merania na tej istej (napr.) osobe



Párový t test

- Párový t test - príklady
 - Výsledky jazykového testu na začiatku a na konci opakovania lekcie – bolo opakovanie užitočné?
 - Očakávaný a skutočný počet bodov z písomky – vie študent dobre odhadnúť, ako písomku napísal?
 - Počet bodov z dvoch písomiek – dá sa povedať, že písomky dopadli rovnako?



Párový t test

- Na čo nie je párový t test – príklady
 - Počet bodov z písomky v dvoch krúžkoch
 - Výsledky jazykového testu v dvoch skupinách, ktoré používali rôzne metódy pri opakovaní
 - Či je priemerné BMI v baletnom súbore rovnaké u mužov a u žien
- Dôvod: nie sú to párové dáta



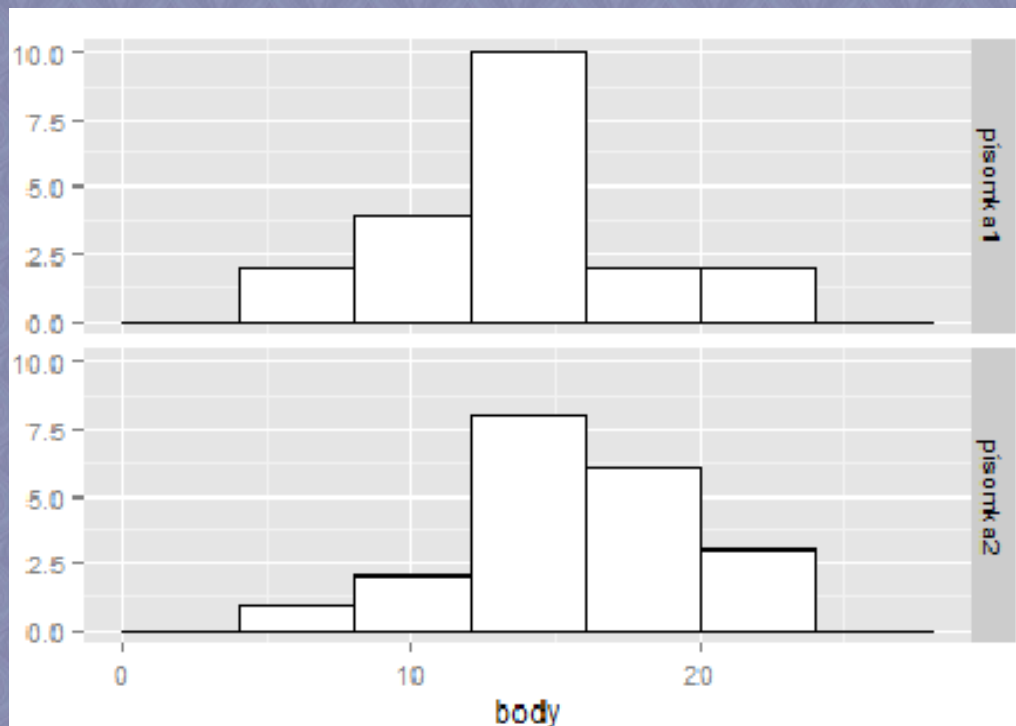
Párový t test

- Párový t test
 - Máme náhodný výber z dvojrozmerného rozdelenia (X, Y)
 - Testujeme hypotézu, že $E[X] = E[Y]$
 - Vypočítame rozdiely $Z = X - Y$, o ktorých predpokladáme, že majú normálne rozdelenie
 - Hypotéza $E[X] = E[Y]$ znamená, že $E[Z] = 0$ - toto už ale vieme testovať jednovýberovým t-testom



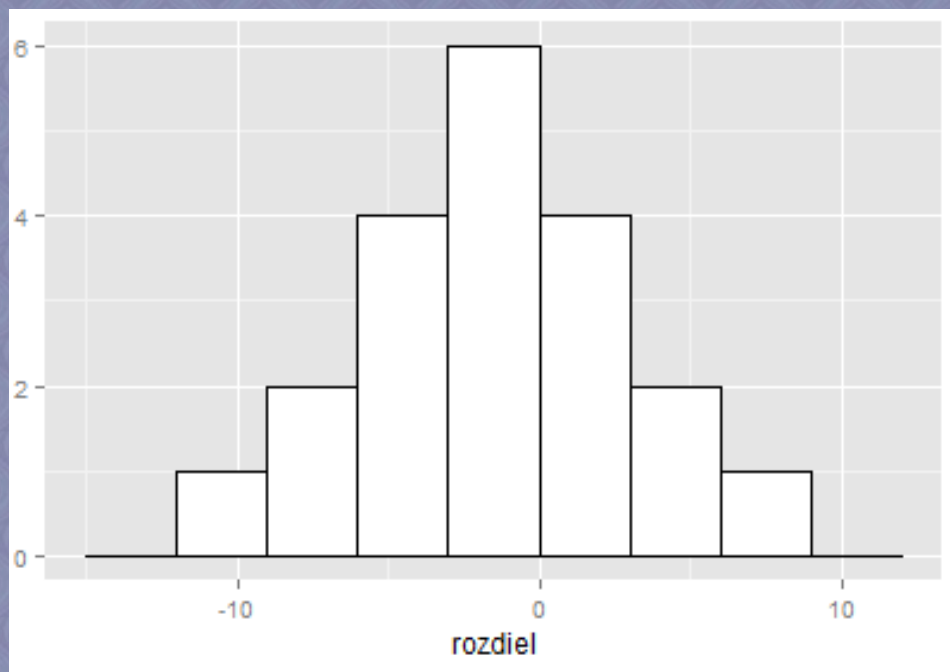
Príklad 3: Porovnanie 2 písomiek

- Cvičenia z matematickej analýzy pre 2. ročník EFM, ZS 2005/2006, dve písomky:



Príklad 3: Porovnanie 2 písomiek

- Rozdiely medzi bodmi z písomiek pre jednotlivých študentov:



Príklad 3: Porovnanie 2 písomiek

- Náhodné premenné: X = počet bodov z 1. písomky, Y = počet bodov z 2. písomky
- Chceme testovať, že X a Y majú rovnaké stredné hodnoty
- Priemer z 2. písomky je o niečo vyšší – je tento rozdiel štatisticky významný?

| Poradové číslo | Písomka 1 | Písomka 2 |
|----------------|-----------|-----------|
| 1 | 14,5 | 12 |
| 2 | 7 | 18,5 |
| 3 | 13,5 | 13 |
| 4 | 12,5 | 17 |
| 5 | 10 | 13 |
| 6 | 12 | 21 |
| 7 | 12,5 | 12 |
| 8 | 13 | 12,5 |
| 9 | 17 | 18 |
| 10 | 21,5 | 22 |
| 11 | 11 | 7 |
| 12 | 12,5 | 16 |
| 13 | 10,5 | 13 |
| 14 | 16 | 9,5 |
| 15 | 13 | 15 |
| 16 | 12,5 | 17 |
| 17 | 10 | 16 |
| 18 | 21,5 | 22 |
| 19 | 5 | 12,5 |
| 20 | 14,5 | 11,5 |
| priemer | 13 | 14,93 |

Príklad 3: Porovnanie 2 písomiek

- Vypočítame rozdiely
- Testujeme t-testom, či majú nulovú strednú hodnotu
- Dokončíme výpočet.

| Poradové číslo | Písomka 1 | Písomka 2 | Rozdiel |
|---------------------|-----------|-----------|---------|
| 1 | 14,5 | 12 | 2,5 |
| 2 | 7 | 18,5 | -11,5 |
| 3 | 13,5 | 13 | 0,5 |
| 4 | 12,5 | 17 | -4,5 |
| 5 | 10 | 13 | -3 |
| 6 | 12 | 21 | -9 |
| 7 | 12,5 | 12 | 0,5 |
| 8 | 13 | 12,5 | 0,5 |
| 9 | 17 | 18 | -1 |
| 10 | 21,5 | 22 | -0,5 |
| 11 | 11 | 7 | 4 |
| 12 | 12,5 | 16 | -3,5 |
| 13 | 10,5 | 13 | -2,5 |
| 14 | 16 | 9,5 | 6,5 |
| 15 | 13 | 15 | -2 |
| 16 | 12,5 | 17 | -4,5 |
| 17 | 10 | 16 | -6 |
| 18 | 21,5 | 22 | -0,5 |
| 19 | 5 | 12,5 | -7,5 |
| 20 | 14,5 | 11,5 | 3 |
| priemer | 13 | 14,93 | -1,93 |
| štandardná odchýlka | | | 4,47 |

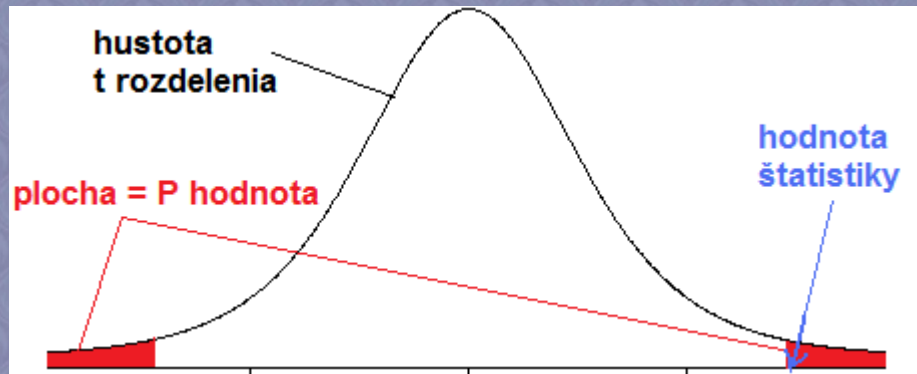
P hodnota

- Dá viac informácie - nie iba rozhodnutie zamietame/nezamietame nulovú hypotézu na zvolenej hladine významnosti



P hodnota

- P hodnota:
 - Ak platí nulová hypotéza, aká je pravdepodobnosť nášho výsledku alebo ešte viac vzdialeného od nulovej hypotézy:

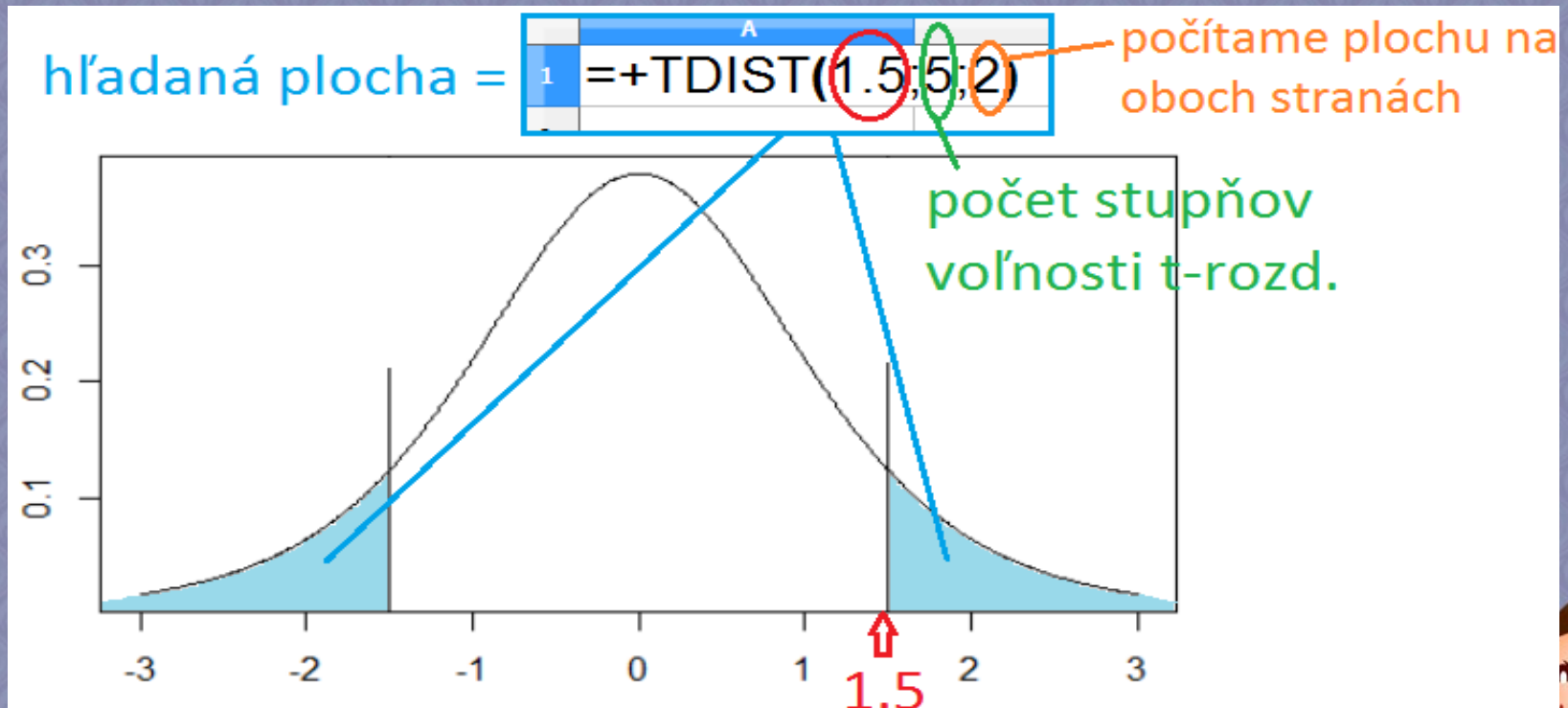


- Teda: ak je hladina významnosti väčšia ako P hodnota, H_0 zamietame



P hodnota

- Výpočet P hodnoty:



Príklad 3 - pokračovanie

- Vypočítame P hodnotu v teste o zhode stredných hodnôt bodov z dvoch písomiek z matematickej analýzy



Príklad 4: Odhad a meranie

- Zopakujeme jednu zo štatistických analýz z článku:

Česká antropologie 64/2, Olomouc, 2014

**SAMOHODNOCENÍ
TĚLESNÉ VÝŠKY, HMOTNOSTI A BMI
U 11–15LETÝCH DÍVEK**

**Self-assessment
of body height and weight and BMI
by girls aged 11–15**

**Miroslav Kopecký¹, Kateřina Kikalová²,
Jitka Tomanová², Jiří Charamza¹**

Príklad 4: Odhad a meranie

- Testuje sa hypotéza, že namerané a dievčatami odhadované hodnoty majú rovnakú strednú hodnotu
- Vypočítajte hodnotu t-štatistiky a P-hodnotu

Tabulka 1. Naměřené a odhadované hodnoty tělesné výšky (cm) dívek

| Věk | n | Změřená tělesná výška | | Odhadovaná tělesná výška | | d | | t-test P |
|-----|-----|-----------------------|------|--------------------------|------|------|------|----------|
| | | M | SD | M | SD | M | SD | |
| 11 | 90 | 151,62 | 7,10 | 152,89 | 7,21 | 1,27 | 2,69 | 0,000** |
| 12 | 129 | 158,26 | 7,01 | 159,30 | 7,48 | 1,03 | 2,72 | 0,000** |
| 13 | 114 | 160,97 | 6,42 | 161,68 | 6,99 | 0,71 | 2,15 | 0,001** |
| 14 | 132 | 163,49 | 6,26 | 164,81 | 6,83 | 1,32 | 2,37 | 0,000** |
| 15 | 102 | 164,72 | 6,90 | 165,56 | 6,88 | 0,84 | 2,11 | 0,000** |

*Poznámka: n – počet probandů, M – aritmetický průměr, SD – směrodatná odchylka, d – rozdíl průměrných hodnot měřené a odhadované tělesné výšky, t-test – hladina významnosti, **p < .01*

Príklad 4: Odhad a meranie

Tabulka 2. Naměřené a odhadované hodnoty tělesné hmotnosti (kg) dívek

| Věk | n | Změřená tělesná hmotnost | | Odhadovaná tělesná hmotnost | | d | | t-test p |
|-----|-----|--------------------------|-------|-----------------------------|-------|-------|------|----------|
| | | M | SD | M | SD | M | SD | |
| 11 | 90 | 43,76 | 10,04 | 41,49 | 9,15 | -2,27 | 2,68 | 0,000** |
| 12 | 129 | 48,10 | 10,40 | 45,50 | 9,49 | -2,59 | 2,72 | 0,000** |
| 13 | 114 | 51,66 | 11,53 | 49,54 | 10,67 | -2,13 | 2,68 | 0,000** |
| 14 | 132 | 55,70 | 10,61 | 55,05 | 9,68 | -0,65 | 3,03 | 0,015* |
| 15 | 102 | 57,91 | 10,06 | 56,59 | 9,94 | -1,32 | 2,25 | 0,000** |

Poznámka: n – počet probandů, M – aritmetický průměr, SD – směrodatná odchylka, d – rozdíl průměrných hodnot měřené a odhadované hmotnosti, t-test – hladina významnosti, * $p < .05$, ** $p < .01$

