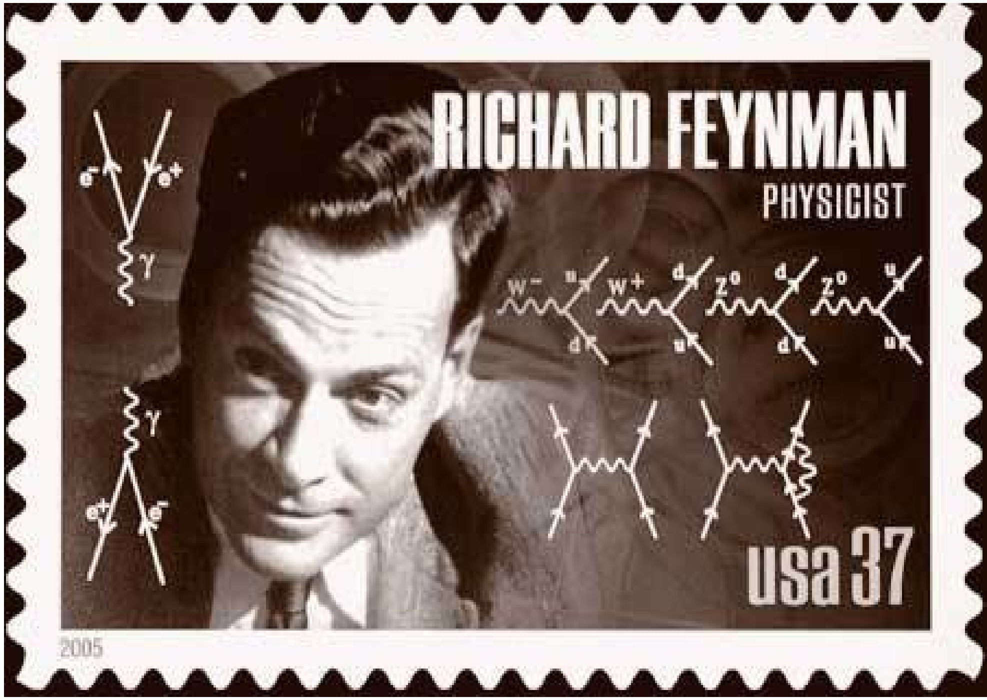
Opakovanie: Podmienená pravdepodobnosť

Beáta Stehlíková, FMFI UK Bratislava,
www.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova

Príklad 1: Hra s kockami *craps*

- Richard Feynmann (1918 – 1988)
  - Spomína, že keď bol po prvýkrát v Las Vegas, spočítal si pravdepodobnosť výhry v jednotlivých hrách
  - Konkrétne:
    „... zistil som, pre stoly, kde sa hrali kocky, to bolo niečo ako 0,493.“



Príklad 1: Hra s kockami *craps*

- V poznámke pod čiarou sa dozvieme, aká hra to bola – tzv. c*raps* - a jej pravidlá:
  - Hráč hádže dvoma kockami.
  - Ak padne súčet 7 alebo 11, vyhráva.
  - Ak padne súčet 2, 3 alebo 12, prehráva.
  - Inak hádže ďalej, až kým padne:
    - súčet 7 – vtedy prehráva
    - ten istý súčet ako v prvom kole – vtedy vyhráva

Príklad 1: Hra s kockami *craps*

- Najskôr jednoduchá otázka ako rozcvička:
  Prečo je „easy four“ a „hard four“?

Names of Rolls in Craps

	1	2	3	4	5	6
1	Snake Eyes	Ace Deuce	Easy Four	Five (Fever Five)	Easy Six	Natural or Seven Out
2	Ace Deuce	Hard Four	Five (Fever Five)	Easy Six	Natural or Seven Out	Easy Eight
3	Easy Four	Five (Fever Five)	Hard Six	Natural or Seven Out	Easy Eight	Nine (Nina)
4	Five (Fever Five)	Easy Six	Natural or Seven Out	Hard Eight	Nine (Nina)	[illegible]
5	Easy Six	Natural or Seven Out	Easy Eight	Nine (Nina)	Hard Ten	[illegible]
6	Natural or Seven Out	Easy Eight	Nine (Nina)	Easy Ten	Yo (Yo-leven)	[illegible]

1 +1 ~ *snake eyes*
2+2 ~ two-two ~ tutu ~ *ballerina*

Príklad 1: Hra s kockami *craps*

- Teraz vypočítame pravdepodobnosť, že hráč prehrá.
- Základná myšlienka – rozdelíme výpočet podľa prvého súčtu:

$$
\begin{aligned}
P(\text{prehra}) = P(&\text{prehrá hneď}) \\
&+ P(\text{prehrá}|\text{padla } 4) \times P(\text{padla } 4) \\
&+ P(\text{prehrá}|\text{padla } 5) \times P(\text{padla } 5) \\
&+ P(\text{prehrá}|\text{padla } 6) \times P(\text{padla } 6) \\
&+ P(\text{prehrá}|\text{padla } 8) \times P(\text{padla } 8) \\
&+ P(\text{prehrá}|\text{padla } 9) \times P(\text{padla } 9) \\
&+ P(\text{prehrá}|\text{padla } 10) \times P(\text{padla } 10)
\end{aligned}
$$

Príklad 2: Zabudnutý dáždnik

- Roztržitý profesor matematiky zabúda v obchode dáždnik s pravd. 1/4 (za predpokladu, že ho nezabudol už skôr).
- Vyšiel z domu s dáždnikom, bol v troch obchodoch a vrátil sa domov bez dáždnika.
- Aká je pravdepodobnosť, že si dáždnik zabudol v *i*-tom obchode? Pre ktoré *i* je táto pravdepodobnosť najvyššia?

Príklad 3: Zo súdnej siene

- People vs. Collins
  - Starší človek v Los Angeles (1968) bol okradnutý, páchatelia boli opísaní ako čierny muž s bradou a fúzami a biela žena s blond vlasmi zopnutými v cope, ktorí odišli v žltom aute.
  - Neskôr zatkli dvojicu, ktorá vyhovovala tomuto popisu.

Príklad 3: Zo súdnej siene

- People vs. Collins - pokračovanie
  - Prokurátor:
    - Majme tieto pravdepodobnosti:

partly yellow automobile	1/10
man with mustache	1/4
girl with ponytail	1/10
girl with blond hair	1/3
black man with beard	1/10
interracial couple in car	1/1000.

    - Ak sú nezávislé, tak pravdepodobnosť toho, že dvojica má tieto vlastnosti je 1/12 000 000, čo označil za „matematický dôkaz ich viny“
  - Porota ich uznala vinnými

Príklad 3: Zo súdnej siene

- People vs. Collins - pokračovanie
  - Odvolanie, Najvyšší súd Kalifornie
    - Uvedené pravdepodobnosti nemajú žiadny podklad
    - Nebola zdôvodnená nezávislosť vlastností (a zrejme neplatí)
    - Použitie pravdepodobnosti bolo nesprávne.

Príklad 3: Zo súdnej siene

- People vs. Collins - odvolanie

  Prijmime predpoklad, že je *p = 1 / 12 000 000* a *12 000 000* možných dvojíc (na základe populácie LA) - aká je pravdepodobnosť, že existuje ďalšia taká dvojica, za podmienky že aspoň jedna taká dvojica existuje (páchatelia)?

Príklad 3: Zo súdnej siene

- People vs. Collins - odvolanie
  - Uvedený výpočet (nachádza sa aj v prílohe rozhodnutia súdu) + problémy s pôvodným výpočtom
  - Zmenil pôvodný rozsudok súdu
  - Ale stalo sa tak až po určitom čase vo väzení

People v. Collins, 68 Cal. 2d 319 - Cal: Supreme Court 1968
http://scholar.google.com/scholar_case?case=2393563144534950884

Príklad 4: Mince

- 65 mincí, z toho 64 pravidelných a jedna falošná - na oboch stranách má znak
- Náhodne vybranou mincu hráč hodil 6-krát a v každom z týchto pokusov padol znak.
- Aká je pravdepodobnosť, že je to tá falošná minca? (Predpokladáme, že nemáme možnosť „podozrivú“ mincu skontrolovať.)

Príklad 5: Náhodné podmnožiny

- Máme množinu s *n* prvkami.
- Dvakrát náhodne vyberieme jej podmnožinu (nezávisle, každú s rovnakou pravdepodobnosťou, s návratom), označíme ich A, B
- Aká je pravdepodobnosť toho, že A je podmnožinou B?

		prvky B	
		žiadne	1
prvky A	žiadne	áno	áno
	1	nie	áno

		prvky B			
		žiadne	1	2	1,2
prvky A	žiadne	áno	áno	áno	áno
	1	nie	áno	nie	áno
	2	nie	nie	áno	áno
	1,2	nie	nie	nie	áno

Príklad 6: Putnam Exam

You have coins $C_1, C_2, \ldots, C_n$. For each k, coin C_k is biased so that, when tossed, it has probability $\frac{1}{2k+1}$ of falling heads. If the n coins are tossed, what is the probability that the number of heads is odd? Express the answer as a rational function of n.

- *Putnam Exam* alebo *Putnam Competition* je vysokoškolská matematická súťaž v USA a v Kanade
- Vyriešime teraz jeden z príkladov v roku 2001

Príklad 7: Putnam Exam II.

- Ďalší príklad z *Putnam Exam,* z roku 2004:

Shanille O'Keal shoots free throws on a basketball court. She hits the first and misses the second, and thereafter the probability that she hits the next shot is equal to the proportion of shots she has hit so far. What is the probability she hits exactly 50 of her first 100 shots?