Diskrétne náhodné vektory

Beáta Stehlíková, FMFI UK Bratislava
www.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova

Náhodné vektory

- Náhodný vektor $(X_1, X_2, ..., X_n)$ – každá jeho zložka je náhodná premenná
- Diskrétny náhodný vektor – nadobúda konečne alebo spočítateľne veľa hodnôt

Príklad 1: Hlasovanie I.

- V komisii sú 3 osoby – A, B, C, pričom
  - A sa správne rozhoduje s pravd. 0,9
  - B sa správne rozhoduje s pravd. 0,8
  - C sa správne rozhoduje s prav. 0,75

Členovia komisie hlasujú nezávisle.

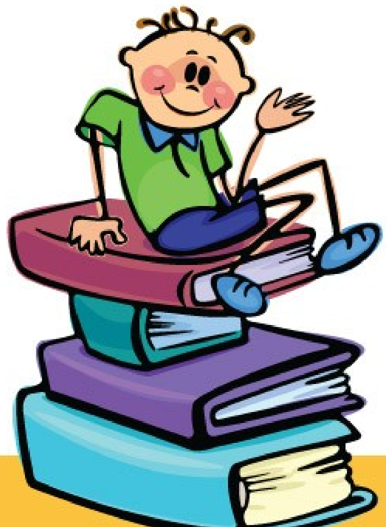
Príklad 1: Hlasovanie I.

- Výsledok hlasovania komisie – náhodný vektor (X_1, X_2, X_3), ak sa i-ty člen komisie rozhodol správne, $X_i = 1$, inak $X_i = 0$.

<u>Otázka (a):</u> Aké hodnoty môže nadobúdať tento náhodný vektor a s akými pravdepodobnosťami sa nadobúdajú?

Príklad 1: Hlasovanie I.

- Komisia sa rozhodne tak, ako hlasovala väčšina jej členov.



Otázka (b): Vypočítajte pravdepodobnosť, že komisia sa rozhodne správne.

Príklad 1: Hlasovanie komisie

<u>Otázka (c):</u> Člen komisie C si všimol, že jeho hlasovanie sa často ukáže byť nesprávne. Zvažuje tieto dve možnosti:

- Sedí vedľa člena B, a tak pri hlasovaní odpíše jeho rozhodnutie.
- Rezignuje a namiesto rozmýšľania nad problémom si len hodí mincou.

Kedy je pravdepodobnosť správneho rozhodnutia komisie väčšia?

Príklad 2: Hlasovanie II.

- Uvažujme pôvodné pravd. a doplňme k pôvodnému vektoru (X_1, X_2, X_3) ešte:
  - zložku Y, ktorá vyjadruje počet členov, ktorí hlasovali správne
  - zložku Z, ktorá vyjadruje rozhodnutie komisie (0 = nesprávne, 1 = správne)

  - » Máme teda náhodný vektor (X_1, X_2, X_3, Y, Z)

Príklad 2: Hlasovanie II.

- Úlohy na zopakovanie základných pojmov:
  a) Nájdite *marginálne rozdelenie Z*
  b) Nájdite podmienené rozdelenie *Z*, ak $X_1=0$ – teda rozdelenie výsledku hlasovania, ak sa A (najšikovnejší člen) rozhodol nesprávne

  c) Nájdite podmienené rozdelenie *Z*, za podmienky, že $X_1+X_2>0$ – teda rozdelenie výsledku hlasovania, ak sa aspoň jeden spomedzi A a B rozhodol správne

Nezávislosť

- Pripomeňme si definíciu nezávislosti diskrétnych náhodných premenných X, Y:

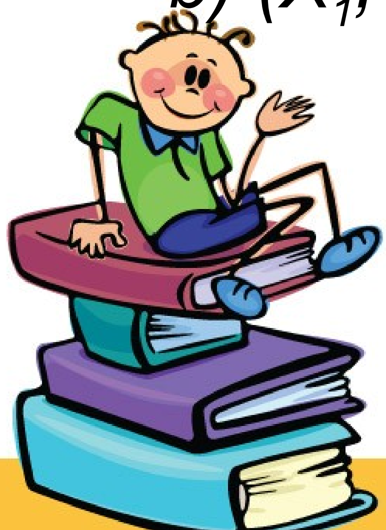
$$\boxed{P[X = x,\ Y = y] = P[X = x]\, P[Y = y]}$$

pre všetky možné hodnoty x, y

- Užitočná stratégia, <u>ako dokazovať, že X, Y nie sú nezávislé</u>: Nájsť hodnoty x, y tak, že pravdep. $P[X = x]$, $P[Y = y]$ sú nenulové, ale $P[X = x,\ Y = y] = 0$

Príklad 3: Nezávislosť I.

- Pomocou uvedenej stratégie dokážte, že tieto zložky týchto náhodných vektorov nie sú nezávislé:
  - *a) (Y, Z)* z príkladu 2
  - *b)* (X_1, Y) z príkladu 2



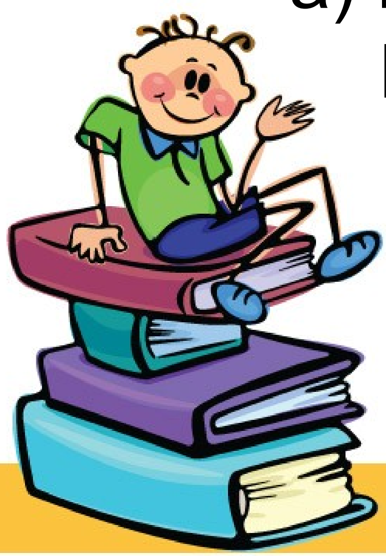
- Niekedy sa nedá použiť, treba dokazovať inak – príklad z DÚ:

  Dokážte, že (X_1, Z) z príkladu 2 nie sú nezávislé.

Príklad 4: Nezávislosť II.

- Dokážte, že zložky nasledujúcich náhodných vektorov nie sú po dvoch nezávislé – teda žiadna dvojica zložiek nie je nezávislá:

  a) Máme 3 červené ruže, 3 ružové a 3 biele. Náhodne z nich vyberieme 5 spravíme kyticu. *(Č, R, B)* je náhodný vektor vyjadrujúci počet ruží jednotlivých farieb v kytici.



Príklad 4: Nezávislosť II.

b) Hodíme naraz šiestimi kockami. Náhodný vektor $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ označuje počet jednotiek, dvojek, ..., šestiek, ktoré na nich padnú.

c) Hodíme naraz desiatimi kockami. Náhodný vektor (P, N) označuje počet párnych a počet nepárnych čísel, ktoré na nich padnú.

d) Hodíme dvakrát kockou. (S, R) označuje súčet a rozdiel (prvé číslo mínus druhé) čísel, ktoré padnú.

Príklad 5: Knihy

- Máme n kníh, ktoré dávame na seba (napríklad diely encyklopédie)
- Pravdepodobnosť, že musíme použiť i-tu knihu označíme p_i a predpokladáme $p_i>0$

- Použitá kniha sa umiestni navrch.
- Tento systém ukladania sa už použil veľmi (nekonečne) veľa krát.

Príklad 5: Knihy

- Náhodný vektor (X_1, X_2,..., X_n), jeho i-ta zložka označuje poradie i-tej knihy
- Dokážte, že pri $p_i \geq p_j$ platí $E[p_i] \leq E[p_j]$
- To znamená, že častejšie používané knihy sú v priemere uložené vyššie (čo intuitívne aj čakáme)

Príklad 6: Čakanie

- Zadanie úlohy – aj na papieri rozdanom na cvičení:

Než se dočkají dva

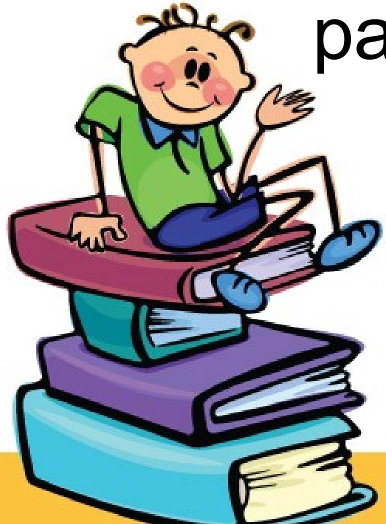
Představme si, že dvě osoby (označme je A a B) nezávisle na sobě dělají současně nezávislé pokusy, přičemž pravděpodobnost úspěchu je v každém pokusu rovna p tak jako dřív. Každá z osob čeká ve své sérii pokusů na první úspěch. Až se ho dočká, bude muset ještě posečkat na svého méně šťastného kolegu. Teprve ve chvíli, kdy i on dosáhne úspěchu, budou moci oba odejít domů. Jak dlouho na tuto chvíli budou muset čekat, jestliže oba své pokusy dělají současně? Řekněme, že v jednom kroku A i B udělají každý jeden pokus. Označme Z počet kroků potřebných k tomu, aby mohli konečně jít domů. Vypočteme rozdělení veličiny Z.

Nechť X je počet pokusů, které potřebuje A k dosažení prvního úspěchu, a nechť Y je počet pokusů, které k dosažení prvního úspěchu potřebuje B. Je jasné, že $Z = \max(X, Y)$. Přitom X a Y jsou nezávislé.

Jan Anděl: Matematika náhody. Matfyzpress, Praha, 2000. Príklad 5.4.

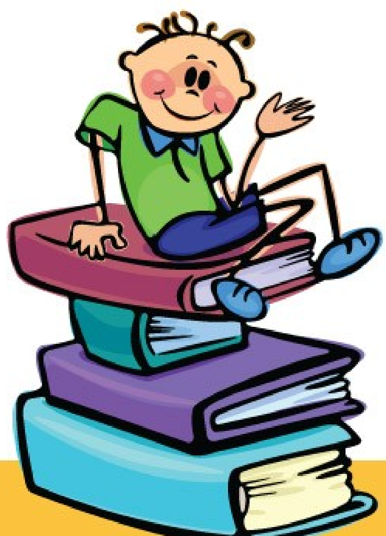
Príklad 6: Čakanie

- Najskôr si tieto pokusy si vyskúšame v dvoch situáciách:
  - Hádžeme kockou, úspechom rozumieme padnutie párneho čísla.
  - Hádžeme kockou, úspechom rozumieme padnutie šestky.



Príklad 6: Čakanie

- Zaznamenávajte:
  - čísla, ktoré hodil hráč A a hráč B
  - hodnoty náhodných premenných X, Y, Z



Čakanie na párne číslo:

číslo pokusu	*hráč A – hodené číslo*	*hráč B – hodené číslo*
1		
2		
3		
4		
5		

Príklad 6: Čakanie

- Ďalšie otázky z papiera:

Ďalšie otázky:

- Stačili vám tabuľky alebo ste museli pridať ďalšie riadky?
- Aká je pravdepodobnosť, že tieto tabuľky stačiť nebudú? Ako sa odpoveď líši v závislosti od toho, či čakáme na šestku alebo na ľubovoľné párne číslo?
- Koľko riadkov by mala mať tabuľka v jednotlivých prípadoch, aby sa s pravdepodobnosťou aspoň 95 percent nemuseli počas hry pridávať ďalšie riadky?
- Vypočítajte strednú hodnotu náhodnej premennej Z. Nakreslite graf tejto strednej hodnoty ako funkcie *p*, kde *p* je pravdepodobnosť úspechu.