

# Metódy riešenia úloh z pravdepodobnosti a štatistiky

## Vzorová písomka 2016/2017

Každý príklad je za 10 bodov.

1. Hru začínate s jedným dolárom. V kažom kole hádzete pravidelnou mincou. Ak padne hlava, stav vášho konta sa zdvojnásobí. Ak padne znak, stav vášho konta sa zmenší na polovicu. Aká je stredná hodnota sumy, ktorú máte po  $n$  kolách? Čomu sa rovná limita tejto strednej hodnoty, ak  $n$  ide do nekonečna?

**Poznámka:** Príklad je z knihy *Mark Joshi, Nick Denton, Andrew Downes: Quant Jov Interview Questions and Answers*. Zaujímavosťou o takúto kariéru a samozrejme aj ostatní ;-)) nájdete ďalší príklad z takýchto pracovných pohovorov v budúcotýždňovej domácej úlohe.

2. Príklad zo skúšok *Society of Actuaries*: Suma, ktorú zaplatí poisťovňa nemocnici, sa skladá z dvoch náhodných zložiek -  $X$  a  $Y$ . Vieme, že  $\mathbb{D}[X] = 5000$ ,  $\mathbb{D}[Y] = 10000$ ,  $\mathbb{D}[X + Y] = 17000$ . Zaviedli sa však nové pravidlá: suma  $X$  sa zvýši o konštantnú hodnotu 100 a suma  $Y$  sa zvýši o 10 percent. Aká je kovariancia  $X$  a  $Y$  po tejto zmene?
3. V jednom príklade z cvičenia (tiež zo skúšok *Society of Actuaries*) sme mali model pre predbežný odhad poistného plnenia  $X$  a sumu  $Y$ , ktorú poisťovňa nakoniec vyplatí. Ich združená hustota bola

$$f(x, y) = \frac{2}{x^2(x-1)} y^{-(2x-1)/(x-1)} \quad x > 1, y > 1$$

(pre iné  $x, y$  je hustota nulová). Počítali sme podmienené pravdepodobnosti a stredné hodnoty.

Teraz predpokladajte, že odhad poistného plnenia bol 5. Aká je pravdepodobnosť, že vyplatená suma bude vyššia ako predbežný odhad?

4. Dokážte nasledovné tvrdenie z Wikipédie:  
[http://en.wikipedia.org/wiki/Exponential\\_distribution](http://en.wikipedia.org/wiki/Exponential_distribution)

• Let  $X \sim \text{Exp}(\lambda_X)$  and  $Y \sim \text{Exp}(\lambda_Y)$  be independent. Then  $Z = \frac{\lambda_X X}{\lambda_Y Y}$  has probability density function  $f_Z(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$ .

Pre aké  $z$  je hustota daná týmto vzorcom a kedy je nulová?