

Metódy riešenia úloh z pravdepodobnosti a štatistiky

Domáca úloha 3

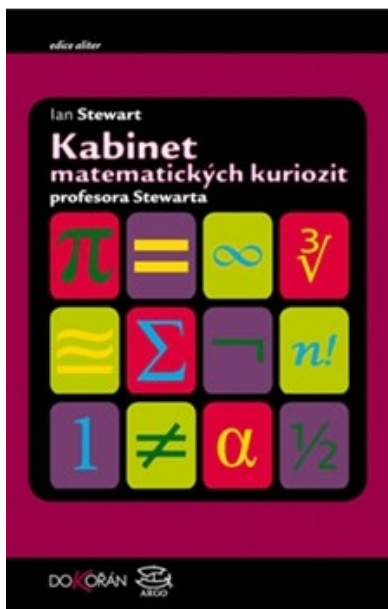
Pokyny k odovzdávaniu:

- Osobne na začiatku cvičenia alebo mailom na adresu beata.ulohy@gmail.com s predmetom **pravdepodobnosť 2017 - DU3 - priezvisko**. Formát predmetu aj mail je potrebné dodržať. V prípade odovzdávania mailom riešenia spíšte do textového súboru alebo ich odfoťte (dostatočne kvalitne, aby bol text čitateľný) a skonvertujte do pdf formátu (dá sa to spraviť aj online). V prípade odovzdávania úlohy mailom treba mail odoslať pred začiatkom cvičenia.
- Pri riešení domácich úloh môžete spolupracovať, ale výsledné riešenie musí napísať každý samostatne. Odpísané úlohy budú hodnotené 0 bodmi.
- Termín odovzdania tejto DÚ: **štvrtok 16. marca 2017 do začiatku cvičenia**

“Plný počet” bodov za domácu úlohu je 60, môžete však získať aj viac ako 60.

Príklad 1 (20 bodov)

Zdroj: Kabinet matematických kuriozít profesora Stewarta



„Koukám, že jste si pořídil kocoura,“ pravil pan Práza panu Vomáčkovi.
„Ten roztomilý bílý ocas se mi opravdu moc líbí! Máte jich hodně?“

„Ani ne,“ odvětil pan Vomáčka. „Mladej Preclík támhle vodvedle jich má dvacet. To já jich mám mnohem míň.“

„Pořád jste mi neřekl, kolik těch kocourů vlastně máte!“

„Hele, já vám to řeknu takhle: kdž si vezmete z mého kocouřince libovolný dva kocoury, pak se pravděpodobnost, že budou voba mít bílý vocasy, rovná přesně jedný polovině.“

„Z toho ale přeci nemůžu poznat, kolik jich máte!“

„Ale jasně že jo.“

Kolik kocourů má pan Vomáčka a kolik z nich má bílé ocasy?

Príklad 2 (20 bodov)



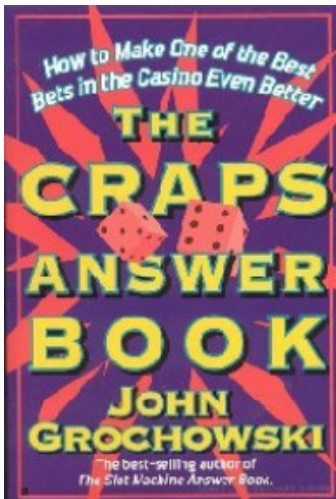
Z korešpondencie Isaaca Newtona (1642 – 1727) a Samuela Pepysa (1633 – 1703) sa zachovala otázka o pravdepodobnostiach. Hráč hádže kockami a snaží sa dosiahnuť úspech pri jednej z nasledovných výziev:

- pri hode 6 kockami hodiť aspoň jednu šestku,
- pri hode 12 kockami hodiť aspoň dve šestky,
- pri hode 18 kockami hodiť aspoň tri šestky.

Pri ktorej z týchto troch možností má najväčšiu šancu na úspech?

Nematematický bonus za 5 bodov: Kto bol Isaac Newton, je všeobecne známe. Kto však bol Samuel Pepys?

Príklad 3 (20 bodov)



V jednej z kapitol knihy *The Craps Answer Book* odpovedá autor na otázky čitateľov. Jednou z nich je nasledovná modifikácia hry craps (pôvodná verzia je popísaná v príklade 1 slajdov k podmienenej pravdepodobnosti):

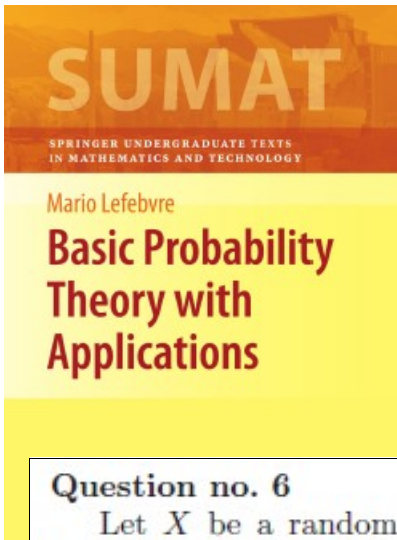
- Hráč hádže dvoma kockami.
- Ak padne súčet 7, hráč okamžite vyhráva.
- Inak hádže ďalej, kým mu padne:
 - súčet 7 – vtedy prehráva
 - ten istý súčet ako v prvom kole – vtedy vyhráva

Odpadá teda možnosť okamžitej prehry, ale na druhej strane pri súčte 11 v prvom kole hráč nevyhráva hneď ale musí pokračovať.

Autor knihy píše: „*The game sounds like a great deal until you take a hard look on it.*“

Dokážte, že pravdepodobnosť výhry v tejto hre je menšia ako v pôvodnej hre craps.

Príklad 4 (20 bodov)



Pre zájemcov: Z fakultnej siete máte na stránke vydavateľstva <http://www.springer.com/gp/book/9780387749945> zadarmo prístup k tejto knihe v pdf formáte.

Na konci kapitol sú príklady na počítanie, jeden z nich je obsahom tejto domácej úlohy, spolu s dopĺňujúcou otázkou.

1. (10 bodov) Vypočítajte koreláciu podľa zadania príkladu.
2. (10 bodov) Nájdite náhodnú premennú, ktorá má vlastnosti z príkladu – teda všetky jej centrálné momenty sú rovné $\frac{1}{2}$.

Question no. 6

Let X be a random variable such that $E[X^n] = 1/2$, for $n = 1, 2, \dots$. We set $Y = X^2$. Calculate $\rho_{X,Y}$.

- (a) 0 (b) $1/4$ (c) $1/2$ (d) $3/4$ (e) 1

Príklad 5 (20 bodov)

Uvažujme situáciu z prvého príkladu zo slajdov o diskretných náhodných vektoroch: Komisia sa skladá z troch členov, každý sa rozhoduje pri hlasovaní správne so zadanou pravdepodobnosťou a ich hlasovanie je nezávislé. V tomto príklade však budeme predpokladať, že člen komisie A sa rozhoduje správne s pravdepodobnosťou 0,8, člen B s pravdepodobnosťou 0,7 a člen C s pravdepodobnosťou 0,6. Uvažujme tieto dve možnosti:

- Komisia prijme také rozhodnutie, ako hlasoval člen A.
- Komisia rozhodne tak, ako hlasovala väčšina jej členov.

Dokážte, že pri týchto pravdepodobnostiach (na rozdiel napríklad od pravdepodobností v slajdoch) je pravdepodobnosť správneho rozhodnutia komisia väčšia pri prvej možnosti.