

Metódy riešenia úloh z pravdepodobnosti a štatistiky

Domáca úloha 5

Pokyny k odovzdávaniu:

- Osobne na začiatku cvičenia alebo mailom na adresu beata.ulohy@gmail.com s predmetom **pravdepodobnosť 2017 - DU5 - priezvisko**. Formát predmetu aj mail je potrebné dodržať. V prípade odovzdávania mailom riešenia spíšte do textového súboru alebo ich odfotíte (dostatočne kvalitne, aby bol text čitateľný) a skonvertujete do pdf formátu (dá sa to spraviť aj online). V prípade odovzdávania úlohy mailom treba mail odoslať pred začiatkom cvičenia.
- Pri riešení domácich úloh môžete spolupracovať, ale výsledné riešenie musí napísať každý samostatne. Odpísané úlohy budú hodnotené 0 bodmi.
- Termín odovzdania tejto DÚ: **štvrtok 30. marca 2017** do začiatku cvičenia

“Plný počet” bodov za domácu úlohu je 60, môžete však získať aj viac ako 60.

Príklad 1 (20 bodov)

Videli sme, ako pomocou funkcie $\text{RAND}()$, ktorá generuje náhodné premenné s rovnomerným rozdelením na intervale $(0, 1)$, generovať náhodné premenné s exponenciálnym rozdelením so strednou hodnotou 1. Upravte tento postup tak, aby sme dostali náhodné premenné s exponenciálnym rozdelením so strednou hodnotou k (kde k je zadaný kladný parameter) a dokážte jeho správnosť (t. j. odvodte hustotu alebo distribučnú funkciu náhodnej premennej, ktorá vznikne vašim postupom).

Príklad 2 (20 bodov)

Uvažujme príklad 3 so slajdov o spojitých náhodných vektorov s tým rozdielom, že výšky škôd budú nezávislé náhodné premenné s exponenciálnym rozdelením so strednou hodnotou 1. Odvodte strednú hodnotu ich maxima a výpočet overte numerickým výpočtom pomocou generovania náhodných čísel. Súbor v Libre Office, MS Office alebo link na google dokument pošlite mailom (s rovnakým predmetom, ako je uvedené hore; ak zvyšok úlohy odovzdáte na papieri, napíšte to do mailu).

Príklad 3 (20 bodov)

Nájdite konkrétnu číselnú hodnotu pravdepodobnosti, ktorú sme odvodili v príklade 2 slajdov o spojitých náhodných vektoroch.

Príklad 4 (20 bodov)

Nech X, Y sú nezávislé náhodné premenné s exponenciálnym rozdelením so strednou hodnotou 1. Dokážte, že náhodné premenné $\max(X, Y)$ a $X + \frac{1}{2} Y$ majú rovnaké pravdepodobnostné rozdelenie.

Príklad 5 (20 bodov)

V šachu získa víťaz hry 1 bod a porazený 0 bodov. V prípade, že nastane remíza, každý z nich získa pol bodu. Traja šachisti – označme ich A, B, C – dosiahli v súťaži rovnaký najvyšší počet bodov a teraz sa má rozhodnúť o celkovom víťazovi súťaže. Na to sa použije nasledovný postup: Bude hrať každý s každým.

- Ak budú mať opäť rovnaký počet bodov, hranie každý s každým sa zopakuje a podľa potreby sa bude opakovať dovtedy, kým nastane niektorá z nasledovných možností.
- Ak budú mať dvaja rovnaký počet bodov, ktorý bude vyšší ako počet bodov tretieho hráča, títo dvaja budú hrať proti sebe dovtedy, kým jeden z nich nevyhrá, a ten sa stane víťazom.
- Ak bude mať jeden hráč vyšší počet bodov ako zvyšní dvaja, stane sa víťazom.

Čo vieme o hráčoch A, B, C? A hrá dobre, ale veľmi opatrne. S hráčmi B a C nikdy neprehrá, ale vyhrá nad nimi iba s pravdepodobnosťou 0,1 (v prípade hráča B), resp. 0,2 (v prípade hráča C). Súboj B a C je naopak dobrodružný, nikdy nekončí remízou je pomerne vyrovnaný. Pravdepodobnosť, že v ňom vyhrá B, je 0,6 a pravdepodobnosť, že vyhrá C, je 0,4. Výsledky šachových partií sú nezávislé.

Áká je pre jednotlivých hráčov A, B, C pravdepodobnosť, že sa stanú víťazmi tejto súťaže?