

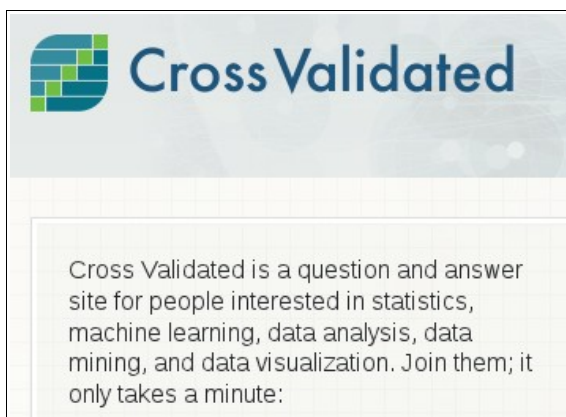
Metódy riešenia úloh z pravdepodobnosti a štatistiky

Domáca úloha 7

Pokyny k odovzdávaniu:

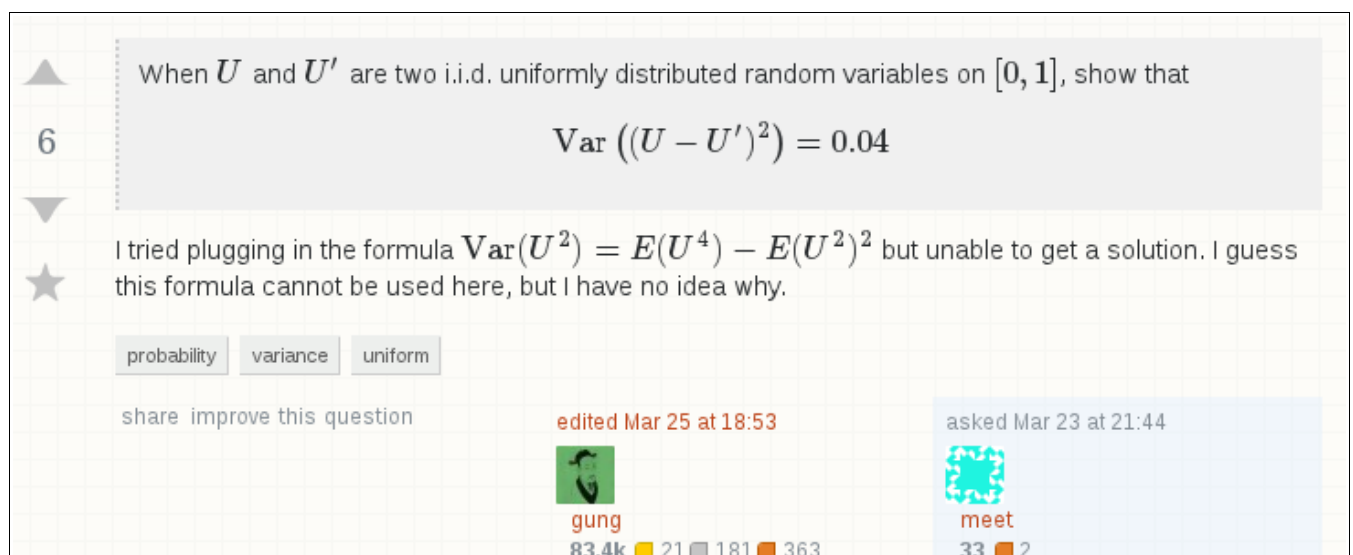
- Osobne na začiatku cvičenia alebo mailom na adresu beata.ulohy@gmail.com s predmetom **pravdepodobnosť 2017 – DU7 - priezvisko**. Formát predmetu aj mail je potrebné dodržať. V prípade odovzdávania mailom riešenia spíšte do textového súboru alebo ich odfoťte (dostatočne kvalitne, aby bol text čitateľný) a skonvertujte do pdf formátu (dá sa to spraviť aj online). V prípade odovzdávania úlohy mailom treba mail odoslať pred začiatkom cvičenia.
- Pri riešení domácich úloh môžete spolupracovať, ale výsledné riešenie musí napísať každý samostatne. Odpísané úlohy budú hodnotené 0 bodmi.
- Termín odovzdania tejto DÚ: **štvrtok 20. apríla 2017** do začiatku cvičenia

“Plný počet” bodov za domácu úlohu je 60, môžete však získať aj viac ako 60.



Na stránke **Cross Validated** <http://stats.stackexchange.com> nájdete veľké množstvo zaujímavých otázok a odpovedí v oblasti pravdepodobnosti a štatistiky, analýzy dát, machine learningu a pod. (Podobná stránka týkajúca sa matematiky je <http://math.stackexchange.com> a sú aj ďalšie). V tejto domácej úlohe sa pozrieme na jeden príklad z pravdepodobnosti, ktorý sa tam nedávno - v marci 2017 - riešil.

Jeho názov je **Computing variance of squared difference of i.i.d. uniform random variables*** a zadanie vyzerá nasledovne:



When U and U' are two i.i.d. uniformly distributed random variables on $[0, 1]$, show that

$$\text{Var}((U - U')^2) = 0.04$$

I tried plugging in the formula $\text{Var}(U^2) = E(U^4) - E(U^2)^2$ but unable to get a solution. I guess this formula cannot be used here, but I have no idea why.

probability variance uniform

share improve this question

edited Mar 25 at 18:53

gung 83.4k 21 181 363

asked Mar 23 at 21:44

meet 33 2

(i.i.d. znamená independent, indentically distributed)

V jednotlivých zadaniach tejto domácej úlohy sa pozrieme na riešenia a poznámky, ktoré používatelia stránky *Cross Validated* k tomuto napísali.

*<http://stats.stackexchange.com/questions/269457/computing-variance-of-squared-difference-of-i-i-d-uniform-random-variables>

Príklad 1

Riešenie, ktoré bolo označené za akceptované, začína takto:

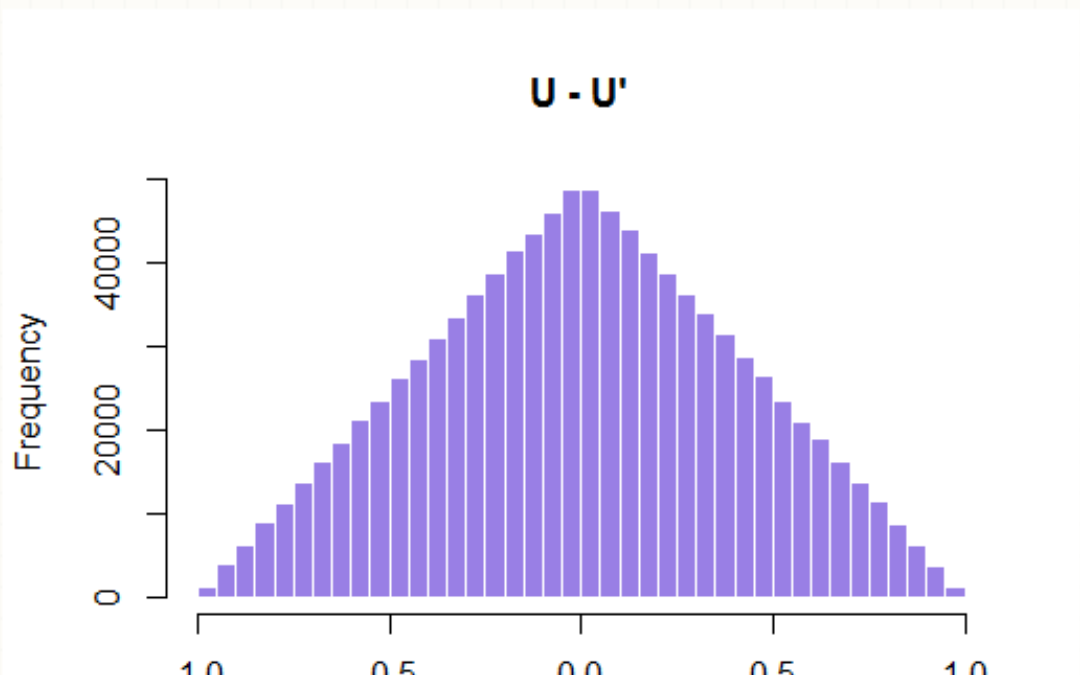
▲ A way of looking at it would be to notice that $Y = U - U'$ with both $U \sim U(0, 1)$ and $U' \sim U(0, 1)$ follows a standard **triangular distribution**, which **density function** is

5

$$f_Y(y) = \begin{cases} y + 1, & -1 < y < 0 \\ 1 - y, & 0 < y < 1 \end{cases}$$

▼

✓ Here is the plot:



The plot shows a histogram of the difference $U - U'$. The x-axis is labeled from -1.0 to 1.0 with major ticks every 0.5. The y-axis is labeled 'Frequency' and ranges from 0 to 40,000 with major ticks every 20,000. The histogram consists of many thin purple bars forming a symmetric triangular shape centered at 0. The peak frequency is approximately 45,000.

A) (20 bodov) Odvodte uvedenú hustotu.

B) (20 bodov) Pomocou nej vypočítajte disperziu požadovanú v zadaní. (Na stránke s príkladom si môžete overiť výsledky vášho výpočtu integrálov.)

Príklad 2

V komentári k tomuto riešeniu sa píše:

3 +1 If you like, you could do this entirely algebraically by expanding

$$E((U - V)^4) - E((U - V)^2)^2 = E(U^4 - 4U^3V + 6U^2V^2 - 4UV^3 + V^4) - (E(U^2 - 2UV + V^2))^2,$$

using linearity of expectation and the (easy) fact that $E(U^k) = 1/(k + 1)$ (where I write V for U'). This drives home the realization that the result has little to do with the actual distributions of U and V : it's just a relationship among their first four moments. - whuber ♦ Mar 24 at 2:21

A) (10 bodov) Odvodte uvedený „easy fact“ o strednej hodnote mocniny náhodnej premennej U .

B) (10 bodov) Pomocou tohto faktu vypočítajte disperziu požadovanú v zadaní. Kde ste pri riešení využili nezávislosť U, V ?

Príklad 3

Alternatívny výpočet z ďalšieho komentáru používa charakteristickú funkciu:

- 1 I'm curious what the alternative was. About the easiest way I can think of doing this starts with the **characteristic function of the uniform distribution**

$$\psi_U(t) = \frac{e^{it} - 1}{it},$$

whence the cf of $U - U'$ is

$$\psi_{U-U'}(t) = \psi_U(t)\psi_{U'}(-t) = 4 \frac{\sin^2(t/2)}{t^2} = 1 + \frac{t^2}{12} + \frac{t^4}{360} + \dots,$$

from which we may immediately write down the answer as

$$\text{Var}((U - U')^2) = 4! \frac{1}{360} - \left(2! \frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{15} - \frac{1}{6^2}.$$

– whuber ♦ Mar 24 at 11:52

- A) **(20 bodov)** Odvod'te uvedenú charakteristickú funkciu náhodnej premennej, ktorá má rovnomerné rozdelenie na intervale (0, 1)
- B) **(10 bodov za každú z troch rovností)** Odvod'te tri rovnosti, ktoré sú vo výpočte $\psi_{U-U'}(t)$.
- C) **(10 bodov)** Vysvetlite výpočet disperzie v poslednom riadku.
- .
- .