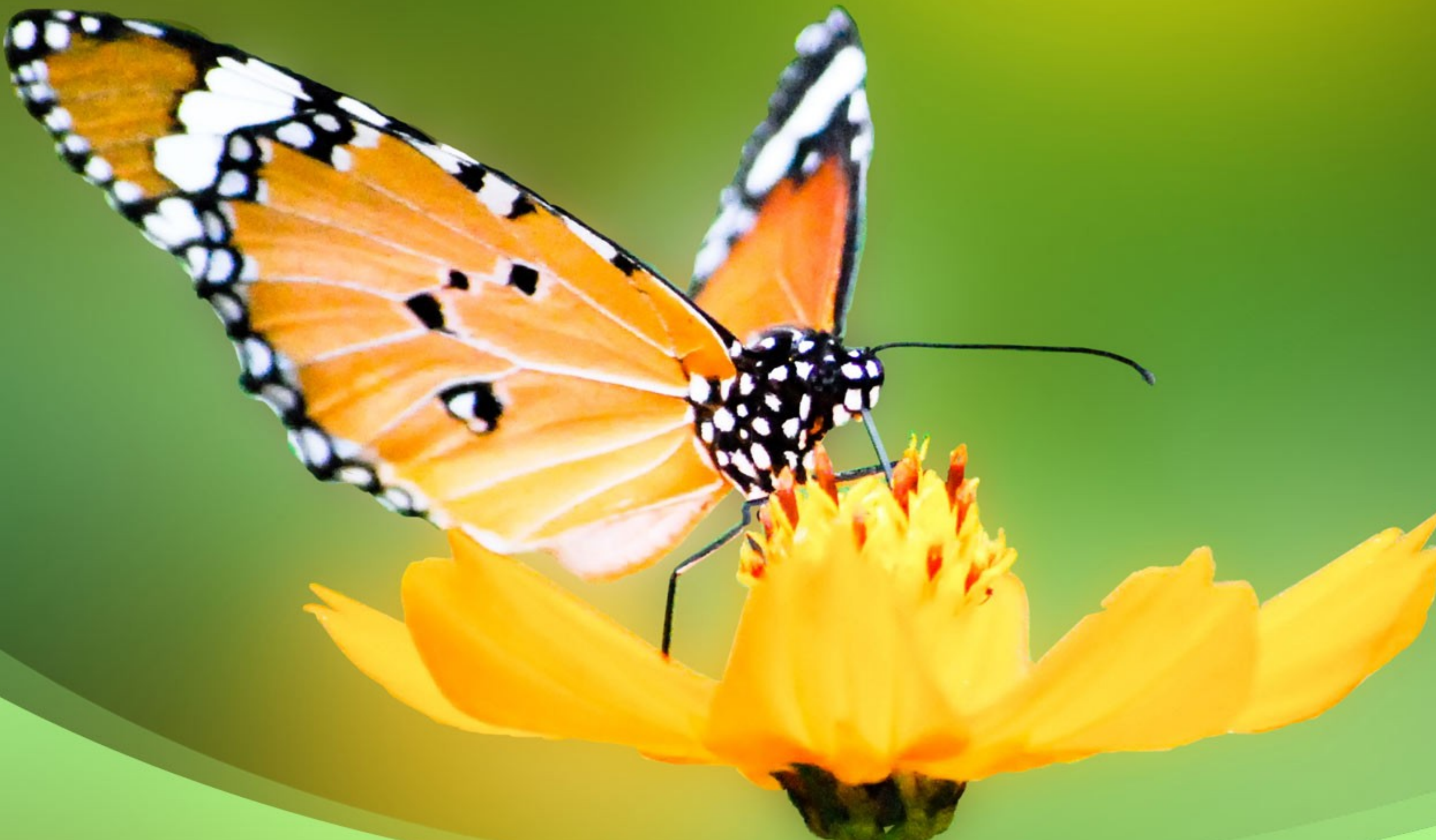


# Diskrétne náhodné vektory

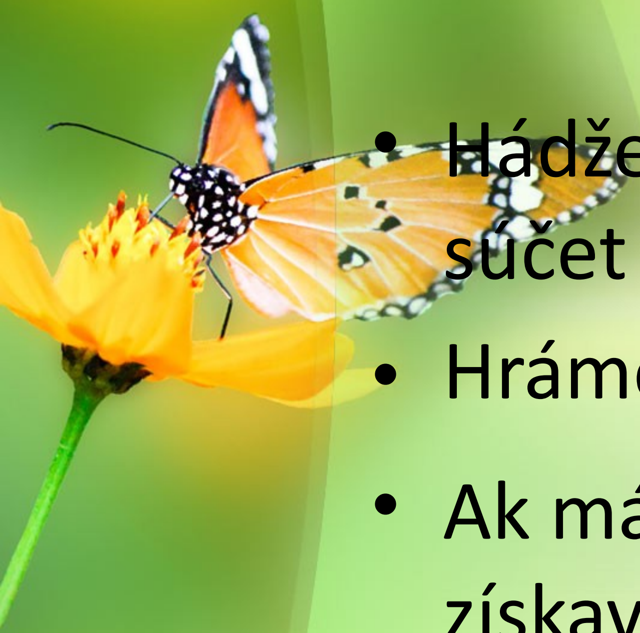
Metódy riešenia úloh z pravdepodobnosti a štatistiky

Beáta Stehlíková, FMFI UK Bratislava
www.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova

# Náhodné vektory

- Náhodný vektor – každá jeho zložka je náhodná premenná
- Diskrétny náhodný vektor – nadobúda konečne alebo spočítateľne veľa hodnôt

# Príklad 1: Súčet väčší ako 7



- Hádžeme dvoma kockami, ak hodíme súčet väčší ako 7, získavame bod
- Hráme 2*N krát, $X_i$ sú body z i-tej hry
- Ak máme na konci viac ako N bodov, získavame darček.
- N si volíme my. Ako to spraviť, aby sme maximalizovali pravdepodobnosť získania darčeka? → spravíme numericky
- Ako zvoliť N, ak $P(X_i=1) = p$, kde $p < 1/2$?

# Príklad 2: Hlasovanie komisie

- Komisia má 3 členov – A, B, C, pričom
  - A sa správne rozhoduje s pravd. 0,9
  - B sa správne rozhoduje s pravd. 0,8
  - C sa správne rozhoduje s prav. 0,75
- A, B, C hlasujú nezávisle
- Výsledok hlasovania komisie – náhodný vektor $(X_1, X_2, X_3)$, ak sa i-ty člen rozhodol správne, tak $X_i = 1$, inak $X_i = 0$.

# Príklad 2: Hlasovanie komisie

- Komisia rozhodne tak, ako hlasovala väčšina jej členov. Aká je pravdepodobnosť, že komisia rozhodne správne?
- C si všimol, že sa najčastejšie rozhoduje nesprávne. Zvažuje dve možnosti: hodiť si mincou a odpísať rozhodnutie od B (sedí vedľa neho). Pri ktorej možnosti bude pravdepodobnosť správneho rozhodnutia komisie vyššia?

# Príklad 3: Hra “chuck-a-luck”

- Hráč staví na jedno číslo (1, 2, 3, 4, 5, 6) a zaplatí 1 euro
- Hodí troma kockami → náhodný vektor (X, Y, Z) s padnutými číslami
- Zaujíma nás, koľko z hodnôt X, Y, Z sa zhoduje s jeho vybraným číslom:
  - Ak sa zhoduje K hodnôt, vyhrá K eur
- Aká je stredná hodnota jeho výhry?

# Príklad 4: Streľba do terča

- Strelec strieľa 5x do terča, s bodovými hodnotami 0, 1, 2, ..., 10
- Jeho aktuálna forma:
  - 10 trafí s pravdepodobnosťou 0,3
  - 9 s pravd. 0,4
  - 8 s pravd. 0,2
  - 7 s pravd. 0,05
  - menej ako 7 s pravd. 0,05
- Aká je pravd., že vyrovná svoj rekord 47?

# Príklad 5: Čakanie

Zadanie – z knihy *Matematika náhody*:

### Než se dočkají dva

Představme si, že dvě osoby (označme je A a B) nezávisle na sobě dělají současně nezávislé pokusy, přičemž pravděpodobnost úspěchu je v každém pokusu rovna $p$ tak jako dřív. Každá z osob čeká ve své sérii pokusů na první úspěch. Až se ho dočká, bude muset ještě posečkat na svého méně šťastného kolegu. Teprve ve chvíli, kdy i on dosáhne úspěchu, budou moci oba odejít domů. Jak dlouho na tuto chvíli budou muset čekat, jestliže oba své pokusy dělají současně? Řekněme, že v jednom kroku A i B udělají každý jeden pokus. Označme $Z$ počet kroků potřebných k tomu, aby mohli konečně jít domů. Vypočteme rozdělení veličiny $Z$.

Nechť $X$ je počet pokusů, které potřebuje A k dosažení prvního úspěchu, a nechť $Y$ je počet pokusů, které k dosažení prvního úspěchu potřebuje B. Je jasné, že $Z = \max(X, Y)$. Přitom $X$ a $Y$ jsou nezávislé.

*Jan Anděl: Matematika náhody. Matfyzpress, Praha, 2000. Príklad 5.4.*

# Príklad 5: Čakanie

- Najskôr si tieto pokusy vyskúšame v dvoch situáciách:
  - Hádžeme kockou, úspechom rozumieme padnutie párneho čísla.
  - Hádžeme kockou, úspechom rozumieme padnutie šestky.

# Príklad 5: Čakanie

- Zaznamenávajme:
  - čísla, ktoré hodili hráči A a B
  - hodnoty náhodných premenných X, Y a Z

**Čakanie na párne číslo:**

| *číslo pokusu* | *hráč A – hodené číslo* | *hráč B – hodené číslo* |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | | |
| 5 | | |

# Príklad 5: Čakanie

- Otázky:
  - Stačili riadky tabuľky alebo ste museli pridávať ďalšie?
  - Aká je pravdepodobnosť, že nebudú stačiť – pri čakaní na párne a na šestky?
  - Koľko riadkov by mali mať jednotlivé tabuľky, aby nám pri zápise s 95% pravdepodobnosťou stačili?

# Príklad 5: Čakanie

- Otázky:
  - Vypočítajte strednú hodnotu náhodnej premennej Z a nakreslite jej graf ako funkcie *p*, kde *p* je pravdepodobnosť úspechu v jednom pokuse