

Metódy riešenia úloh z pravdepodobnosti a štatistiky

Domáca úloha 4

- Odvzdávanie: Osobne na začiatku cvičenia alebo mailom – odoslaným pred začiatkom cvičenia - na adresu beata.ulohy@gmail.com s predmetom pravdepodobnosť 2018 - DU4 – priezvisko. Formát predmetu aj mail je potrebné dodržať. V prípade odovzdávania mailom riešenia spíšte do textového súboru alebo ich odfoťte (dostatočne kvalitne, aby bol text čitateľný) a skonvertujte do pdf formátu (dá sa to spraviť aj online). Ak odovzdávate časť úlohy mailom a časť osobne, napíšte o tom poznámku do riešenia (napr. „zvyšok odovzdám osobne“ alebo „odkaz na výpočet v google dokumente je v maili“)
- Pri riešení domácich úloh môžete spolupracovať, ale výsledné riešenie musí napísať každý samostatne. Odpísané úlohy budú hodnotené 0 bodmi.
- Termín odovzdania tejto DÚ: **štvrtok 22. marca 2018 do začiatku cvičenia**
- “Plný počet” bodov za domácu úlohu je 60 – teda 3 príklady, môžete však získať aj viac ako 60 bodov. Do výpočtu priemeru aj do súťaže o hodnotenie A bez písomky sa počítajú všetky získané body.

Príklad 1 (20 bodov)

Zovšeobecňujeme hru „kameň – papier – nožnice“ pre N hráčov nasledovne: Každý z hráčov ukáže



jednu z možností. Ak sú medzi voľbami všetky tri možnosti alebo si všetci vybrali tú istú, o víťazovi nie je rozhodnuté a hra sa opakuje. V opačnom prípade sú teda voľby všetkých hráčov z dvojprvkovej množiny. Všetci s víťaznou voľbou sú potom víťazmi.

Napríklad ak hru hrajú traja hráči A, B, C:

- Ak A hrá kameň, B papier a C nožnice, hra sa musí opakovať
- Ak všetci traja hrajú kameň, hra sa musí opakovať
- Ak A hrá kameň, ale B a C hrajú papier, tak B a C sú víťazmi.

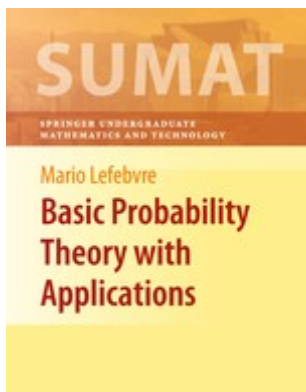
Uvažujme hru N hráčov.

- Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že sa o víťazovi / víťazoch v jednej hre nerozhodne a limitu tejto pravdepodobnosti, ak počet hráčov ide do nekonečna.
- Vypočítajte strednú hodnotu počtu hier, ktoré sú potrebné na to, aby sa rozhodlo o víťazovi / víťazoch.

Príklad 2 (20 bodov)

V študovanej populácii je 50 percent nefajčiarov, 30 percent príležitostných fajčiarov a 20 percent pravidelných fajčiarov. Pravdepodobnosť, že počas nasledujúcich piatich rokov bude diagnostikovaná choroba súvisiaca so srdcom, je pre príležitostných fajčiarov dvakrát väčšia ako pre nefajčiarov, ale dvakrát menšia ako pre pravidelných fajčiarov. Istému človeku bola takáto choroba diagnostikovaná. Aká je pravdepodobnosť, že je pravidelný fajčiar?

Príklad 3 (20 bodov)



Pre zájemcov: Z fakultnej siete máte na stránke vydavateľstva <http://www.springer.com/gp/book/9780387749945> zadarmo prístup k tejto knihe v pdf formáte.

Na konci kapitol sú príklady na počítanie, jeden z nich je obsahom tejto domácej úlohy, spolu s doplňujúcou otázkou navyše.

- (10 bodov) Vypočítajte koreláciu podľa zadania príkladu.
- (10 bodov) Nájdite náhodnú premennú, ktorá má vlastnosti z príkladu – teda všetky jej centrálné momenty sú rovné $\frac{1}{2}$.

Question no. 6

Let X be a random variable such that $E[X^n] = 1/2$, for $n = 1, 2, \dots$. We set $Y = X^2$. Calculate $\rho_{X,Y}$.

- (a) 0 (b) 1/4 (c) 1/2 (d) 3/4 (e) 1

Príklad 4 (20 bodov)

Komisia sa skladá z troch členov, každý sa rozhoduje pri hlasovaní správne so zadanou pravdepodobnosťou a ich hlasovanie je nezávislé. V tomto príklade však budeme predpokladať, že člen komisie A sa rozhoduje správne s pravdepodobnosťou 0,8, člen B s pravdepodobnosťou 0,7 a člen C s pravdepodobnosťou 0,6. Uvažujme tieto dve možnosti:

- Komisia prijme také rozhodnutie, ako hlasoval člen A.
- Komisia rozhodne tak, ako hlasovala väčšina jej členov.

Dokážte, že pri týchto pravdepodobnostiach (na rozdiel napríklad od pravdepodobností v slajdoch) je pravdepodobnosť správneho rozhodnutia komisia väčšia pri prvej možnosti.



Príklad 5 (20 bodov)



Hráme nasledovnú hru s kockami. Zaplatíme poplatok 1 euro a hodíme štyrmi kockami – jednou modrou a tromi červenými.

- Ak sa číslo na modrej kocke nezhoduje s číslom na žiadnej z červených kociek, nevyhrávame nič.
- Ak sa číslo na modrej kocke zhoduje s číslom na K červených kockách, získavame $K+1$ eur.
- Ak sa číslo na modrej kocke zhoduje s číslom na práve jednej červenej kocke, získavame 50 centov navyše, ak sa zhodujú čísla na zostávajúcich dvoch červených kockách.

Aká je stredná hodnota našej výhry?

Zdroj obrázkov:

- https://www.freepik.com/free-icon/jury_932108.htm
- https://www.freepik.com/free-photo/rock-paper-scissors_343315.htm
- https://www.freepik.com/free-photo/3-red-dice-close-up-on-white-background_1127204.htm