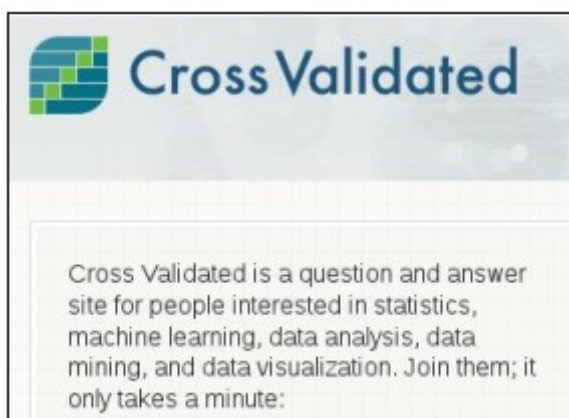


Metódy riešenia úloh z pravdepodobnosti a štatistiky

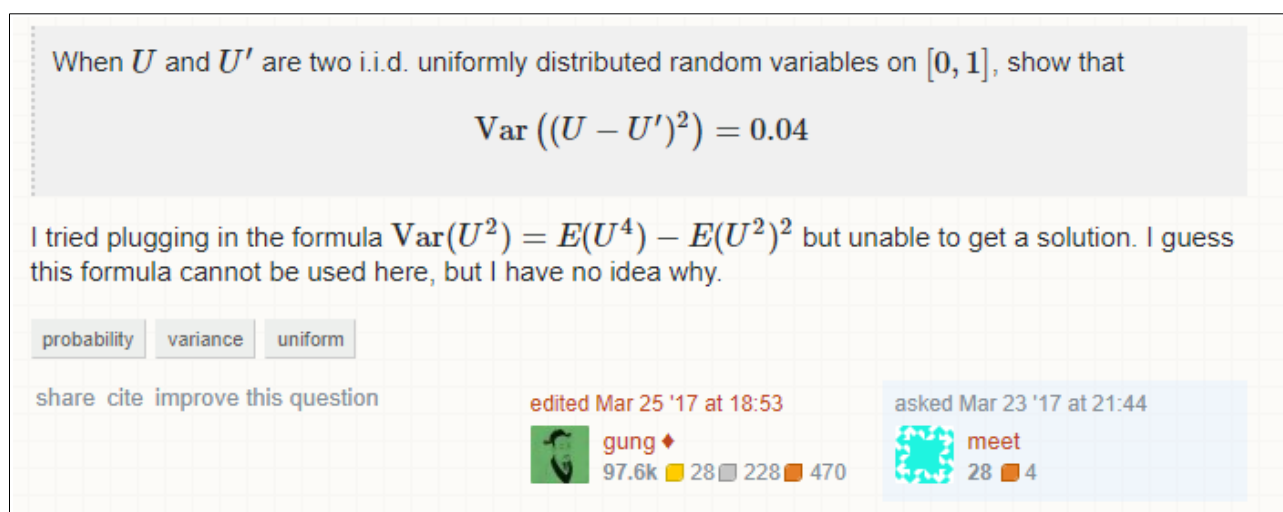
Domáca úloha 6

- Odvzdávanie: Osobne na začiatku cvičenia alebo mailom – odoslaným pred začiatkom cvičenia - na adresu beata.ulohy@gmail.com s predmetom pravdepodobnosť 2018 - DU6 – priezvisko.
- Pri riešení domácich úloh môžete spolupracovať, ale výsledné riešenie musí napísať každý samostatne. Odpísané úlohy budú hodnotené 0 bodmi.
- Termín odovzdania tejto DÚ: **štvrtok 12. marca 2018 do začiatku cvičenia**
- “Plný počet” bodov za domácu úlohu je 60 – teda 3 príklady, môžete však získať aj viac ako 60 bodov. Do výpočtu priemeru aj do súťaže o hodnotenie A bez písomky sa počítajú všetky získané body.



Na stránke Cross Validated <http://stats.stackexchange.com> sa dá nájsť veľké množstvo zaujímavých otázok a odpovedí z oblasti pravdepodobnosti a štatistiky, analýzy dát, machine learningu a pod. (Podobná stránka týkajúca sa matematiky je <http://math.stackexchange.com> a sú aj ďalšie). V tejto domácej úlohe sa pozrieme na jeden príklad z pravdepodobnosti, ktorý sa tam minulý rok riešil.

Jeho názov je **Computing variance of squared difference of i.i.d. uniform random variables** – nájdete ho na stránke <http://stats.stackexchange.com/questions/269457/computing-variance-of-squared-difference-of-i-i-d-uniform-random-variables>, kde si môžete kontrolovať výsledky- a jeho zadanie vyzerá nasledovne:



The image is a screenshot of a question on the Cross Validated website. The question text reads: 'When U and U' are two i.i.d. uniformly distributed random variables on $[0, 1]$, show that
$$\text{Var}((U - U')^2) = 0.04$$
' Below the question, there is a comment: 'I tried plugging in the formula $\text{Var}(U^2) = E(U^4) - E(U^2)^2$ but unable to get a solution. I guess this formula cannot be used here, but I have no idea why.' There are tags for 'probability', 'variance', and 'uniform'. At the bottom, there are buttons for 'share', 'cite', and 'improve this question'. The question was edited on Mar 25 '17 at 18:53 by user 'gung' (97.6k reputation, 28 gold, 228 silver, 470 bronze badges) and asked on Mar 23 '17 at 21:44 by user 'meet' (28 gold, 4 bronze badges).

(i.i.d. znamená independent, indentially distributed)

V jednotlivých zadaniach tejto domácej úlohy sa pozrieme na riešenia a poznámky, ktoré používatelia stránky Cross Validated k tomuto napísali.

Príklad 1

Riešenie, ktoré bolo označené za akceptované, začína takto:

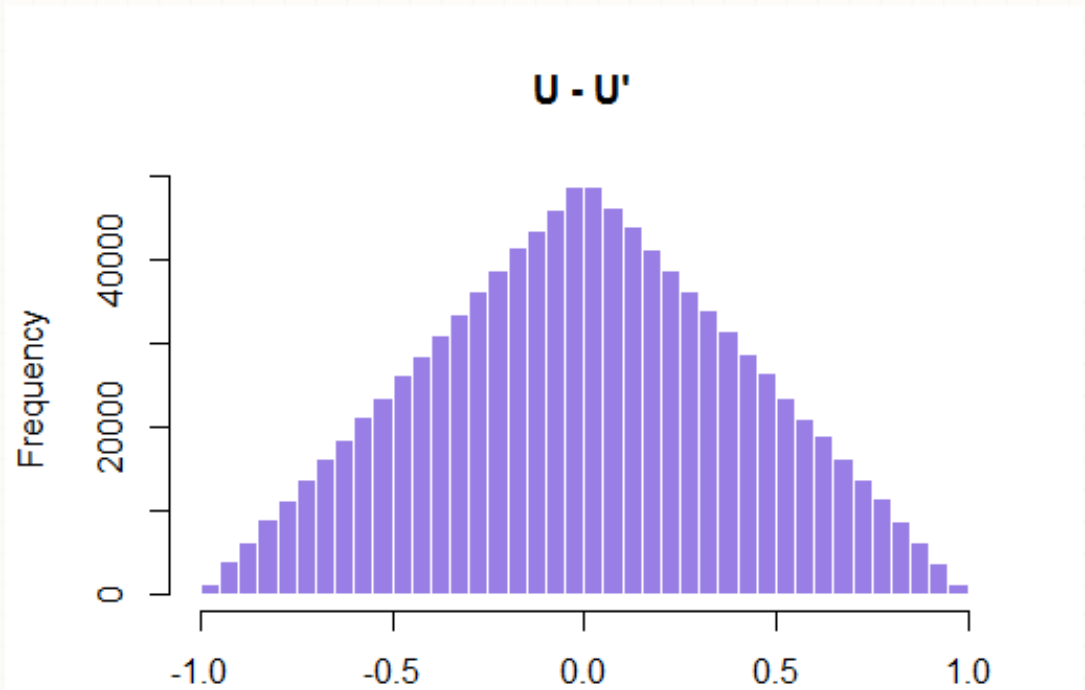
▲ A way of looking at it would be to notice that $Y = U - U'$ with both $U \sim U(0, 1)$ and $U' \sim U(0, 1)$ follows a standard **triangular distribution**, which **density function** is

5

$$f_Y(y) = \begin{cases} y + 1, & -1 < y < 0 \\ 1 - y, & 0 < y < 1 \end{cases}$$

▼

✓ Here is the plot:



The plot shows a histogram of the difference $U - U'$. The x-axis is labeled from -1.0 to 1.0 with major ticks at -1.0, -0.5, 0.0, 0.5, and 1.0. The y-axis is labeled 'Frequency' and ranges from 0 to 40000 with major ticks at 0, 20000, and 40000. The histogram consists of many thin purple bars forming a symmetric triangular shape centered at 0. The peak frequency is approximately 45000.

A) (20 bodov) Odvodte uvedenú hustotu.

B) (20 bodov) Pomocou nej vypočítajte disperziu požadovanú v zadaní. (Na stránke s príkladom si môžete overiť výsledky vášho výpočtu integrálov.)

Príklad 2

V komentári k tomuto riešeniu sa píše:

3 +1 If you like, you could do this entirely algebraically by expanding

$$E((U - V)^4) - E((U - V)^2)^2 = E(U^4 - 4U^3V + 6U^2V^2 - 4UV^3 + V^4) - (E(U^2 - 2UV + V^2))^2,$$

using linearity of expectation and the (easy) fact that $E(U^k) = 1/(k + 1)$ (where I write V for U'). This drives home the realization that the result has little to do with the actual distributions of U and V : it's just a relationship among their first four moments. - whuber ♦ Mar 24 at 2:21

A) (10 bodov) Odvodte uvedený „easy fact“ o strednej hodnote mocniny náhodnej premennej U .

B) (10 bodov) Pomocou tohto faktu vypočítajte disperziu požadovanú v zadaní. Kde ste pri riešení využili nezávislosť U, V ?

Príklad 3

Alternatívny výpočet z ďalšieho komentáru používa charakteristickú funkciu:

- 1 I'm curious what the alternative was. About the easiest way I can think of doing this starts with the **characteristic function of the uniform distribution**

$$\psi_U(t) = \frac{e^{it} - 1}{it},$$

whence the cf of $U - U'$ is

$$\psi_{U-U'}(t) = \psi_U(t)\psi_{U'}(-t) = 4 \frac{\sin^2(t/2)}{t^2} = 1 + \frac{t^2}{12} + \frac{t^4}{360} + \dots,$$

from which we may immediately write down the answer as

$$\text{Var}((U - U')^2) = 4! \frac{1}{360} - \left(2! \frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{15} - \frac{1}{6^2}.$$

– whuber ♦ Mar 24 at 11:52

- A) **(20 bodov)** Odvod'te uvedenú charakteristickú funkciu náhodnej premennej, ktorá má rovnomerné rozdelenie na intervale (0, 1)
- B) **(10 bodov za každú z troch rovností)** Odvod'te tri rovnosti, ktoré sú vo výpočte $\psi_{U-U'}(t)$.
- C) **(10 bodov)** Vysvetlite výpočet disperzie v poslednom riadku.
- .
- .