

Spojité náhodné vektory

Metódy riešenia úloh
z pravdepodobnosti a štatistiky



Skúšky Society of Actuaries

SOA – Society of Actuaries, www.soa.org

Exam P – Probability:

The syllabus for Exam P develops the candidate's knowledge of the fundamental probability tools for quantitatively assessing risk. The application of these tools to problems encountered in actuarial science is emphasized. A thorough command of the supporting calculus is assumed. Additionally, a very basic knowledge of insurance and risk management is assumed.



Príklad 1: Doba fungovania prístroja I.

- Ďalší z príkladov zo skúšok *Society of Actuaries*
- Fungovanie prístroja:
 - Skladá sa z dvoch častí
 - Ak sa niektorá z nich pokazí, prístroj prestane fungovať
 - Doba životnosti (v hodinách) týchto dvoch častí je náhodný vektor (S, T) s hustotou $f(s, t)$ pre $0 < s < 1$, $0 < t < 1$



Príklad 1: Doba fungovania prístroja I.

- Aká je pravdepodobnosť, že prístroj prestane fungovať počas prvej polhodiny?

$$(A) \int_0^{0.5} \int_0^{0.5} f(s, t) ds dt$$

$$(B) \int_0^1 \int_0^{0.5} f(s, t) ds dt$$

$$(C) \int_{0.5}^1 \int_{0.5}^1 f(s, t) ds dt$$

$$(D) \int_0^{0.5} \int_0^1 f(s, t) ds dt + \int_0^1 \int_0^{0.5} f(s, t) ds dt$$

$$(E) \int_0^{0.5} \int_{0.5}^1 f(s, t) ds dt + \int_0^1 \int_0^{0.5} f(s, t) ds dt$$



Príklad 1: Doba fungovania prístroja I.

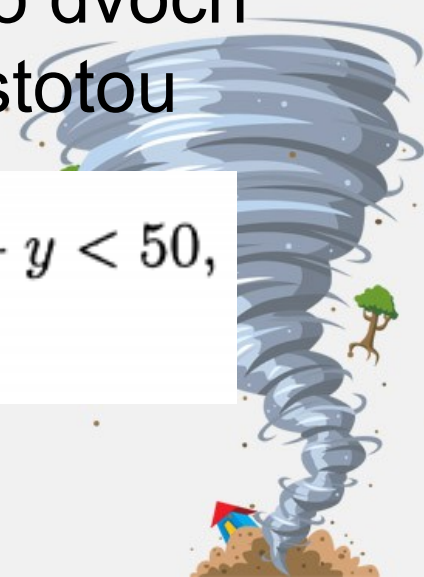
- Modifikácia:
 - Prístroj sa skladá z dvoch častí
 - Ak sa niektorá z nich pokazí, prístroj prestane fungovať
 - Doba životnosti (v hodinách) týchto dvoch častí je náhodný vektor (S, T) s hustotou $f(s, t)$ pre $s, t > 0$ – teda životnosť nie je ohraničená 1 hodinou
- Aká je pravd., že po hodine ešte funguje?



Príklad 2: Doba fungovania prístroja II.

- Fungovanie prístroja:
 - Skladá sa z dvoch častí
 - Ak sa niektorá z nich pokazí, prístroj prestane fungovať
 - Doba životnosti (v mesiacoch) týchto dvoch častí je náhodný vektor (X, Y) s hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{6}{125,000} (50 - x - y) & \text{pre } 0 < x < 50 - y < 50, \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$



Príklad 2: Doba fungovania prístroja II.

- Aká je pravdepodobnosť, že po 20 mesiacoch prístroj ešte funguje?

$$(A) \frac{6}{125,000} \int_0^{20} \int_0^{20} (50 - x - y) dy dx$$

$$(B) \frac{6}{125,000} \int_{20}^{30} \int_{20}^{50-x} (50 - x - y) dy dx$$

$$(C) \frac{6}{125,000} \int_{20}^{30} \int_{20}^{50-x-y} (50 - x - y) dy dx$$

$$(D) \frac{6}{125,000} \int_{20}^{50} \int_{20}^{50-x} (50 - x - y) dy dx$$

$$(E) \frac{6}{125,000} \int_{20}^{50} \int_{20}^{50-x-y} (50 - x - y) dy dx$$



Príklad 3: Tornádo

- Poistovňa analyzuje škody spôsobené tornádom:
 - X je časť poistného plnenia zodpovedajúca škodám na dome
 - Y je časť poistného plnenia zodpovedajúca škodám na ostatnom majetku
 - môžu byť ešte ďalšie časti plnenia
 - teda X, Y sú z intervalu $[0, 1]$ a platí $X + Y < 1$



Príklad 3: Tornádo

- Združená hustota (X, Y) je

$$f(x, y) = \begin{cases} 6(1 - (x + y)) & \text{pre } x > 0, y > 0, x + y < 1, \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

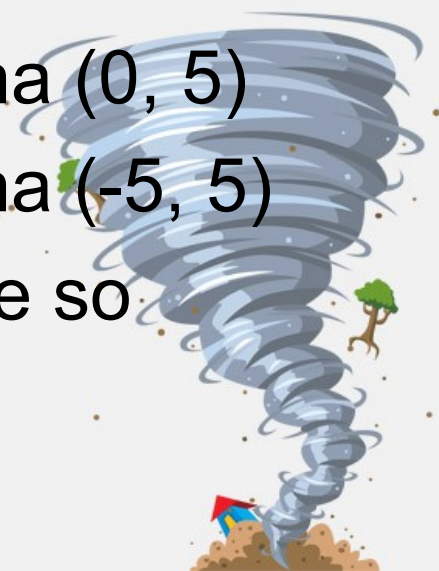
- Aká je pravdepodobnosť, že časť zodpovedajúca škodám na dome bude tvoriť menej ako 20 percent poistného plnenia?

(A) 0.360 (B) 0.480 (C) 0.488 (D) 0.512 (E) 0.520



Príklad 4: Súčet a súčin náhodných čísel

- Nech X a Y sú nezávislé náhodné premenné.
- Aká je v nasledovných prípadoch pravdepodobnosť, že ich súčin je väčší ako ich súčet?
 - X, Y majú rovnomerné rozdelenie na $(0, 5)$
 - X, Y majú rovnomerné rozdelenie na $(-5, 5)$
 - X, Y majú exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou 10



Príklad 5: Spoluúčasť

- Poistenie:
 - Združené rozdelenie vektora škôd (X, Y) :

$$f(x, y) = 2x \quad \text{pre } 0 < x < 1 \text{ a } 0 < y < 1$$

- Spoluúčasť: 1
- Vypočítajte strednú hodnotu sumy vyplatenej poisťovňou.

(A) $1/4$ (B) $1/3$ (C) $1/2$ (D) $7/12$ (E) $5/6$



Príklad 6: Najväčšia škoda

- Škody na domoch spôsobené vetrom sú nezávislé náhodné premenné s hustotou

$$f(x) = \begin{cases} 3x^{-4} & \text{pre } x > 1, \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

kde x je škoda v tisícoch.

- Hlásené boli 3 poškodené domy.
- Aká je stredná hodnota najvyššej škody?

(A) 2025 (B) 2700 (C) 3232 (D) 3375 (E) 4500



Príklad 7: Generovanie náhodných čísel

- Z časopisu Chip (marec 2017):
- Čo ak chceme čísla medzi 2 a X? Ktorú jednotku v danom vzorci treba prepísať na dvojku?
- Ktoré známe rozdelenie dostaneme, ak spravíme **$-\text{LN}(\text{NÁHČÍSLO}())$** ?

10 Excel

Generování náhodných čísel s použitím vzorce

V tabulkovém kalkulátoru Excel ze sady Microsoft Office najdete vzorec, který umí podle vašeho zadání generovat náhodná čísla. Jde o funkci **NÁHČÍSLO**, která generuje náhodná čísla mezi 0 a 1. Chcete-li získat jiná náhodná čísla, je třeba vzorec trochu upravit. Abyste získali například náhodná čísla větší nebo rovna nule a menší než určité číslo, použijte vzorec **=NÁHČÍSLO()*X**, kde „X“ nahradíte za zvolené číslo. Jestliže se mají vaše náhodná čísla být větší než 1 a menší než X, upravte vzorec na **=NÁHČÍSLO()*(X-1)+1**. Parametr „X“ přitom může představovat nejvyšší možné náhodné číslo, zatímco „1“ reprezentuje dolní limit generovaných čísel.



Príklad 7: Generovanie náhodných čísel

- Prečo vieme generovať škody z pr. 6 takto? Funkcia RAND() vracia náhodné číslo z rovnomerného rozdelenia na (0, 1).

fx
$$=(1-RAND())^{(-1/3)}$$

	A	B	C	D	E	F	
1	škoda 1	škoda 2	škoda 3	maximálna		priemer	
2	1,248846738	1,424798849	1,909629419	1,909629419		2,046037078	
3	1,122603986	1,259875254	1,06874411	1,259875254			
4	1,423739122	1,13451281	1,97251734	1,97251734			
5	5,42472574	4,083394619	1,232862772	5,42472574			
6	1,306421974	1,303468946	1,07541118	1,306421974			
7	1,705035921	1,42650808	1,055167528	1,705035921			
8	1,727183243	1,059994691	1,09254171	1,727183243			
9	1,559690093	1,76910223	1,011008018	1,76910223			
10	1,099027434	1,208918141	1,852645285	1,852645285			
11	1,303824346	1,795002642	1,404100386	1,795002642			



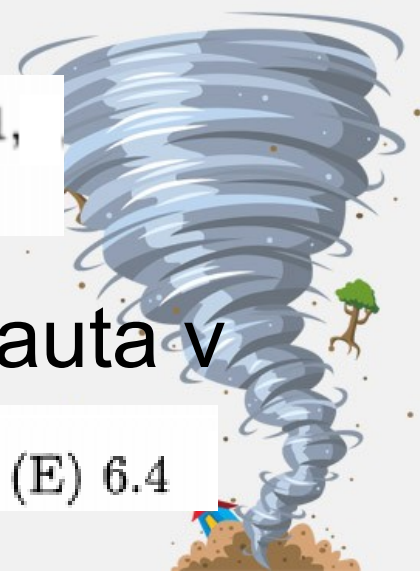
Príklad 8: Automobily

- Poistenie automobilov, z dát o dopravných nehodách vieme:
 - Vek automobilu X
 - Čas nehody od zaplattenia ročného poistenia Y
 - Združené rozdelenie vektora (X, Y) :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{64}(10 - xy^2) & \text{pre } 2 \leq x \leq 10 \text{ a } 0 \leq y \leq 1, \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

- Vypočítajte strednú hodnotu veku auta v nehode.

(A) 4.9 (B) 5.2 (C) 5.8 (D) 6.0 (E) 6.4



Príklad 9: Požiare

- Po nahlásení požiaru poisťovňa:
 - Spraví predbežný odhad poistného plnenia X
 - Označme skutočne vyplatenú sumu Y
 - Združené rozdelenie vektora (X, Y) :

$$f(x, y) = \frac{2}{x^2(x-1)} y^{-(2x-1)/(x-1)}, \quad x > 1, y > 1.$$

- Za predpokladu, že predbežný odhad je 2, vypočítajte pravdepodobnosť, že vyplatená suma bude medzi 1 a 3.

(A) 1/9 (B) 2/9 (C) 1/3 (D) 2/3 (E) 8/9



Príklad 10: Dopravná nehoda

- Ak poistenec spôsobí nehodu, poisťovňa zaplatí škodu na jeho aute (výška škody je náhodná premenná X) aj na aute druhého účastníka nehody (náh. prem. Y)
- X má marginálnu hustotu 1 pre $0 < x < 1$
- Ak $X = x$, podmienená hustota Y je 1 pre $x < y < x+1$

Aká je pravdepodobnosť, že škoda na aute druhého účastníka nehody je viac ako 0,5?

(A) $3/8$ (B) $1/2$ (C) $3/4$ (D) $7/8$ (E) $15/16$



Príklad 11: Čas spracovania

- Výška poistného plnenia X má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}x^2 & \text{for } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- Pre dané $X=x$ má čas spracovania v hodinách rovnomerné rozdelenie na intervale $(x, 2x)$
- Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybrané spracovanie bude trvať 3 hodiny alebo viac?



(A) 0.17 (B) 0.25 (C) 0.32 (D) 0.58 (E) 0.83