Náhodné siete

Beáta Stehlíková

2-EFM-155 Analýza sociálnych sietí

Fakulta matematiky, fyziky a informatiky, UK v Bratislave

Erdős–Rényi

Vplyv pravdepodobnosti p

Opakovanie: n vrcholov, každá hrana vznikne s pravdepodobnosťou p nezávisle od ostatných.

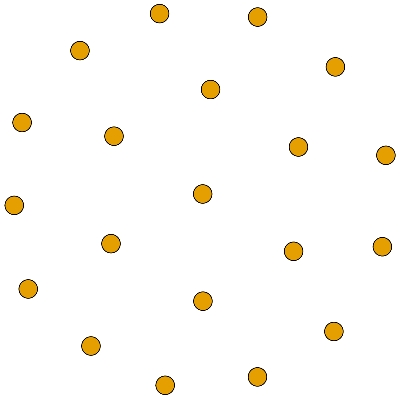
Pozrime sa na vplyv parametra p:

```r
set.seed(123)
g1 <- erdos.renyi.game(20, p = 0.001)
g2 <- erdos.renyi.game(20, p = 0.003)
g3 <- erdos.renyi.game(20, p = 0.1)
g4 <- erdos.renyi.game(20, p = 0.25)
```

Veľmi malé p

S veľkou pravdepodobnosťou nevznikne žiadna hrana.

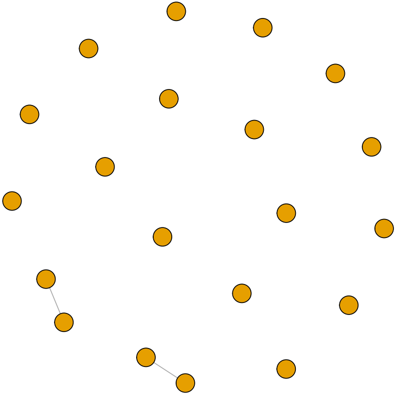
```
plot(g1, vertex.size = 10, vertex.label = NA)
```



Zväčšujeme p

S veľkou pravdepodobnosťou vznikne aspoň jedna hrana

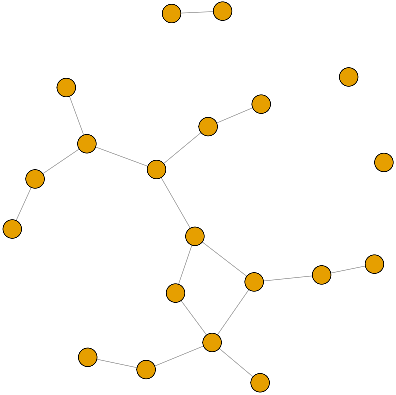
```
plot(g2, vertex.size = 10, vertex.label = NA)
```



Zväčšujeme p

S veľkou pravdepodobnosťou vznikne *giant component*

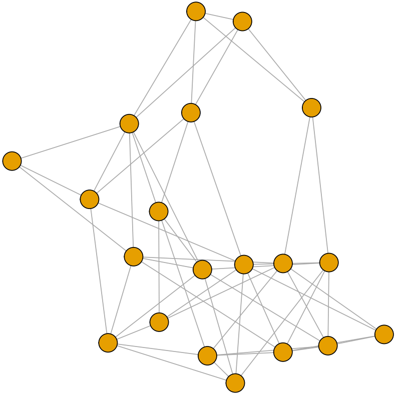
```
plot(g3, vertex.size = 10, vertex.label = NA)
```



Zväčšujeme p

S veľkou pravdepodobnosťou je sieť súvislá

```
plot(g4, vertex.size = 10, vertex.label = NA)
```



Monotónne vlastnosti

Monotónne vlastnosti - nepokazia sa pridaním hrany

Napríklad:

- sieť obsahuje aspoň jednu hranu
- sieť obsahuje cyklus
- sieť je súvislá

Čo napríklad nie je monotónna vlastnosť:

- sieť obsahuje vrchol s nepárnym stupňom

Prahová funkcia (threshold)

Funkcia $t(n)$ sa nazýva **prahová funkcia** pre určitú monotónnu vlastnosť siete, ak platí pre $n \to \infty$:

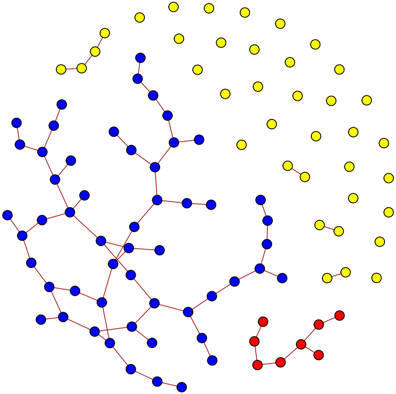
$$P[A(N)] \to 1 \text{ pre } p(n)/t(n) \to \infty,$$

$$P[A(N)] \to 0 \text{ pre } p(n)/t(n) \to 0,$$

kde $A(N)$ znamená, že náhodne vygenerovaná sieť N má uvažovanú vlastnosť (napr. "sieť je súvislá")

Príklad: Pre existenciu cyklu je prahová funkcia $1/n$. Takže napríklad ak budeme generovať ER siete s $p(n) = 1/\sqrt{n}$, tak pre $n \to \infty$ bude pravdepodobnosť výskytu cyklu konvergovať k 1.

Cvičenie: Prečo názov "giant component". Pre zadanú sieť vypočítajme podiel počtu vrcholov v najväčšom a druhom najväčšom komponente (ak sú dva najväčšie, bude to 1). Spravte štatistiku získaných hodnôt. (Obr. je pre $n = 100$ a $p = 0.015$)



Giant component

Cvičenie: Aký veľký je giant komponent Zobrazte štatistiku o veľkosti najväčšieho komponentu.

Na predchádzajúcom obrázku obsahuje najväčší komponent 54 vrcholov, teda 54 percent vrcholov siete.

Giant component

Intuitívne odvodíme **aproximáciu podielu vrcholov v najväčšom komponente**

- q = hľadaný podiel vrcholov
- pozrieme sa na náhodne zvolený vrchol, pravdpodobnosť, že je v najväčšom komponente je q
- pravd., že tento vrchol nie je v najväčšom komponente je pravd., že všetci jeho susedia sú mimo tohto komponentu
- a to je $(1-q)^d$, kde d je stupeň vrchola

$$1 - q = \sum (1-q)^d P(d),$$

kde $P(d)$ je pravdepodobnosť, že vrchol má stupeň d

V ER sieťach je rozdelenie binomické, ktoré sa aproximuje Poissonovým s parametrom $\lambda = (n-1)p$ (preto sa im hovorí aj *Poisson networks*).

Giant component

Hľadané q je riešením rovnice

$$q = 1 - e^{-q(n-1)p}$$

Táto rovnica má riešenie z $(0, 1)$ práve vtedy, keď $p > 1/(n-1)$.

Cvičenie: Ako sa to zhoduje s našimi simuláciami?

Watts-Strogatz

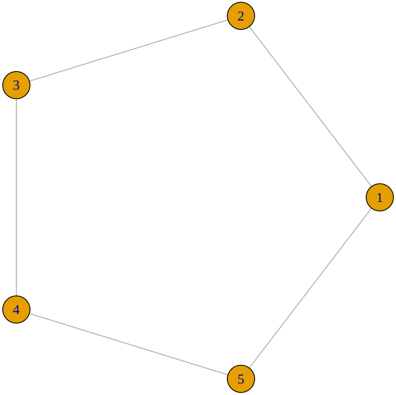
Začíname zo symetrickej siete typu `lattice` (neskôr pridáme parameter `p`), napr.

```
g1 <- watts.strogatz.game(dim=1, size=5, nei=1, p=0)
g2 <- watts.strogatz.game(dim=1, size=8, nei=1, p=0)
g3 <- watts.strogatz.game(dim=1, size=8, nei=2, p=0)
```

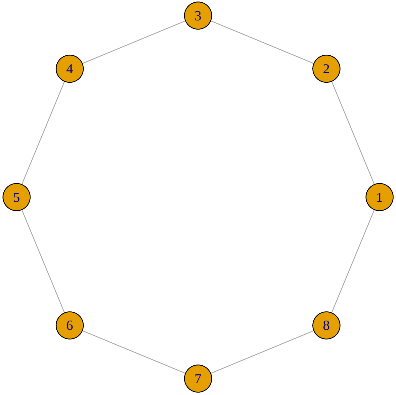
Parametre:

- `dim` - Integer constant, the dimension of the starting lattice. size
- `size` - Integer constant, the size of the lattice along each dimension.
- `nei` - Integer constant, the neighborhood within which the vertices of the lattice will be connected

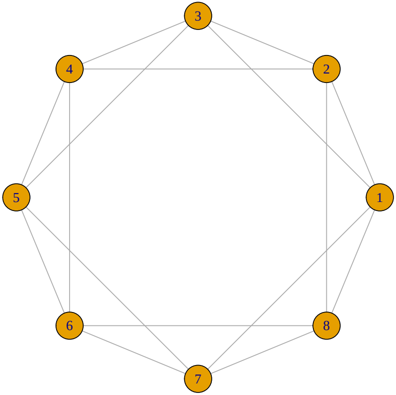
```r
g1 <- watts.strogatz.game(dim=1, size=5, nei=1, p=0)
plot(g1, layout = layout_in_circle)
```



```r
g2 <- watts.strogatz.game(dim=1, size=8, nei=1, p=0)
plot(g2, layout = layout_in_circle)
```



```r
g3 <- watts.strogatz.game(dim=1, size=8, nei=2, p=0)
plot(g3, layout = layout_in_circle)
```



Typické vlastnosti pre veľké n

ER model

- malá miera zhlukovania (videli sme na obrázkoch)

Lattice

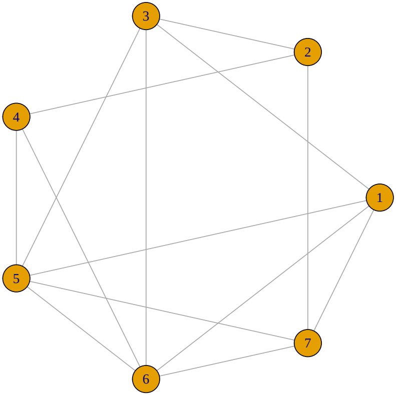
- vysoká miera zhlukovania
- ale príliš pravidelné
- a má veľký priemer (ako ďaleko sú dva najvzdialenejšie vrcholy)

Nový model - Watts-Strogatz

- v sieti `lattice` s pravdepodobnosťou p rovnomerne náhodne poprepájame spojené vrcholy
- pri dosť veľkom p sa zníži priemer
- ale nemalo by byť príliš veľké, aby sa zachovala vysoká miera zhlukovania

Ukážka

```
g <- watts.strogatz.game(dim=1, size=7, nei=2, p=0.1)
g <- simplify(g) # mozu vzniknut viacnasobne hrany a slucky
plot(g, layout = layout_in_circle)
```

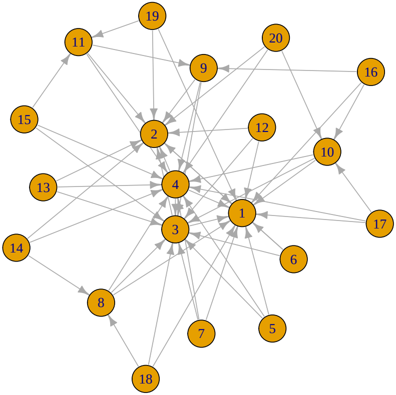


Barabasi - Albert

- Orientovaná sieť, ktorá vzniká postupne, v každom kroku pridáme `m` vrcholov
- Pravdepodobnosť, že nový vrchol bude spojený s niektorým zo starých, je úmerná tomu, koľko hrán už daný vrchol má
- Dá sa získať aj neorientovaná sieť

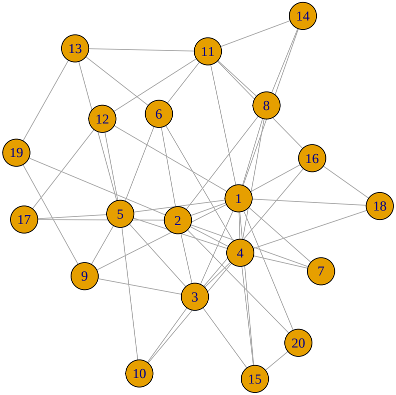
Príklad

```
g <- barabasi.game(n=20, m=3)
plot(g, edge.arrow.size = 0.7)
```



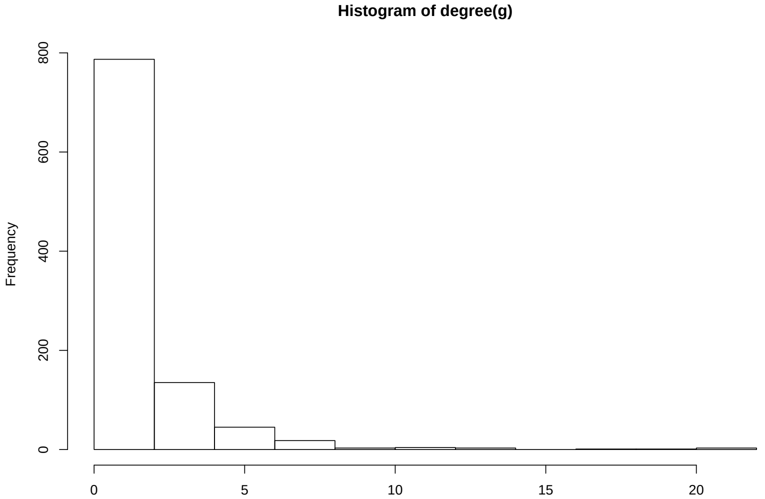
Príklad

```
g <- barabasi.game(n=20, m=3, directed = FALSE)
plot(g)
```



Rozdelenie stupňa vrcholov

```r
g <- barabasi.game(n=1000, directed = FALSE)
hist(degree(g))
```



Štatistické modely

Základná myšlienka

Pravdepodobnosť, či hrana medzi dvoma vrcholmi vznikne, závisí od

- atribútov vrchola (prax, vek, ...)
- porovnanie atribútov vrcholov, medzi ktorými môže vzniknúť (oddelenie na ktorom pracujú, ...)
- charakteristík siete (celkový počet hrán, počet spoločných susedov danej dvojice vrcholov)

a parametre sa odhadujú štatistickými metódami

Tzv. **ERGM** (*Exponential random graph models*)

V R-ku: https://cran.r-project.org/web/packages/ergm/index.html