# 2 Axiomatická definícia pravdepodobnosti

**Príklad 2.1.** Hodíme vyváženou hracou kockou. (T.j. pravdepodobnosť, že na kocke padne číslo $i$ je rovnaká pre všetky $i = 1, 2, ..., 6$.) Na výsledkoch hádzania nás bude zaujímať iba to, či padlo číslo 6. Nájdite pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ vhodný na modelovanie tejto situácie, t.j. navrhnite postupne $\Omega$, $\mathcal{S}$ aj $P$. Formálne popíšte udalosť, že na kocke nepadla šestka.

**Príklad 2.2.** Nech $\Omega = \{a, b, c, d\}$ a $\mathcal{F} = \{\{a\}, \{b\}\}$. Nájdite najmenšiu $\sigma$-algebru $(\Omega, \mathcal{S})$ takú, že $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$.

**Príklad 2.3.** Nech $(\Omega, \mathcal{S}_1)$ a $(\Omega, \mathcal{S}_2)$ sú $\sigma$-algebry. Nech $\mathcal{S} = \{A \subseteq \Omega : A \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2\}$ $= \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$. Ukážte, že $(\Omega, \mathcal{S})$ je $\sigma$-algebra.

**Príklad 2.4.** Nech $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech $A, B, C$ sú udalosti na tomto priestore. Nech $B \subset A$, $P(A) = P(C) = 1/2$, $P(B) = P(A \cap C) = 1/4$ a $P(B \cap C) = 1/8$. Nájdite pravdepodobnosť udalosti $A \setminus (B \cup C)$.

**Príklad 2.5.** Nech $P_1$ a $P_2$ sú dve pravdepodobnosti (pravdepodobnostné miery) na $\sigma$-algebre $(\Omega, \mathcal{S})$. Nech $\alpha \in [0, 1]$. Definujme funkciu $P : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ nasledovne: $P(A) = \alpha P_1(A) + (1-\alpha) P_2(A)$ pre každé $A \in \mathcal{S}$. Potom $P$ je tiež pravdepodobnosť na $(\Omega, \mathcal{S})$. Dokážte.

**Príklad 2.6.** Za okrúhlym stolom je rovnomerne rozostavených 6 stoličiek. Náhodne za tento stôl rozsadíme 6 ľudí, ktorí tvoria 3 manželské páry. Aká je pravdepodobnosť, že aspoň jeden manžel bude sedieť presne na protiľahlej strane stola ako jeho manželka?

**Príklad 2.7.** Do $m$ krabíc hodíme $n$ loptičiek ($n \geq m$), pričom pri každom hode trafíme práve jednu krabicu, každú s pravdepodobnosťou zasiahnutia $1/m$. Nájdite pravdepodobnosť, že na konci hádzania bude v každej krabici aspoň jedna loptička. (Výsledok môže byť vyjadrený v tvare sumy.)

## Príklady na precvičenie

**Príklad 2.8.** Hodíme dvoma vyváženými mincami. Na výsledkoch hádzania nás budú zaujímať len udalosti týkajúce sa padnutých strán. Nájdite pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ vhodný na modelovanie tejto situácie. Formálne popíšte udalosť, že na oboch minciach padla rovnaká strana (t.j. hlava-hlava, alebo znak-znak) a uveďte pravdepodobnosť tejto udalosti.

**Príklad 2.9.** Nech $(\Omega, \mathcal{S})$ je $\sigma$-algebra a nech $\emptyset \neq A \in \mathcal{S}$. Definujme nasledovný systém množín: $\mathcal{S}_A = \{A \cap B : B \in \mathcal{S}\}$. Potom $(A, \mathcal{S}_A)$ je tiež $\sigma$-algebra. Dokážte!

**Príklad 2.10.** Nech $I$ je množina indexov, nech $(\Omega, \mathcal{S}_i)$ je $\sigma$-algebra pre každé $i \in I$ a definujme $\mathcal{S} = \{A \subseteq \Omega : A \in \mathcal{S}_i \text{ pre všetky } i \in I\} = \cap_{i \in I} \mathcal{S}_i$. Je potom tiež $(\Omega, \mathcal{S})$ $\sigma$-algebra?

**Príklad 2.11.** Nech $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ je pravdepodobnostný priestor a nech $A, B, C \in \mathcal{S}$. Ukážte, že $P(A\Delta C) \leq P(A\Delta B) + P(B\Delta C)$. (Symetrickú diferenciu definujeme $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.)

**Príklad 2.12.** Riešte príklad 2.6 pre 8 stoličiek a 4 páry.

**Príklad 2.13.** Na množine štyroch vrcholov konštruujeme náhodný neorientovaný graf bez slučiek tým spôsobom, že každú dvojicu vrcholov spojíme s pravdepodobnosťou $p$ a to navzájom nezávisle. Nájdite pravdepodobnosť, že výsledný graf bude obsahovať **a)** aspoň jeden izolovaný vrchol; **b)** aspoň jeden trojuholník. (Trojuholník je trojica vrcholov spojených spôsobom "každý s každým".)

**Príklad 2.14.** Náhodne vyberieme 3 rôzne čísla spomedzi $1, ..., n$, kde $n \geq 3$. Aká je pravdepodobnosť, že sa medzi vybratými číslami budú nachádzať nejaké dve susedné čísla?

**Príklad 2.15.** Postupnosť čísiel $(1, 2, \ldots, n)$ dokonale náhodne premiešame. (T.j. každá spomedzi $n!$ permutácií má rovnakú pravdepodobnosť.) Nájdite pravdepodobnosť $p_n$, že aspoň jedno z čísiel $1, 2, \ldots, n$ bude po premiešaní na svojom pôvodnom mieste. Určte $\lim_{n\to\infty} p_n$.

**Príklad 2.16.** Nech $P$ je pravdepodobnosť na $(\Omega, \mathcal{S})$ a nech $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{S}$. Indukciou vzhľadom na $n$ dokážte:

$$P\left(\cup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

**Príklad 2.17. a)** Nech $\Omega = \{a, b, c\}$ a nech $\mathcal{S}_1 = \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$, $\mathcal{S}_2 = \{\Omega, \emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}\}$, $\mathcal{S}_3 = \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$. Pre ktoré $i$ je $(\Omega, \mathcal{S}_i)$ $\sigma$-algebra? **b)** Nech $\Omega = \{a, b, c, d\}$. $\mathcal{F} = \{\{a, b\}, \{a, c, d\}\}$. Nájdite najmenšiu $\sigma$-algebru $(\Omega, \mathcal{S})$ takú, že $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$.