Pravdepodobnosť a štatistika (1-INF-435)
Príklady k cvičeniam

Radoslav Harman, KAMŠ, FMFI UK

29. septembra 2013

1 Axiomatická definícia pravdepodobnosti

Príklad 1. *Nech* $\Omega = \{a, b, c\}$ *a nech* $\mathcal{S}_1 = \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}$, $\mathcal{S}_2 = \{\Omega, \emptyset, \{a, b\}, \{b, c\}\}$, $\mathcal{S}_3 = \{\Omega, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$. *Pre ktoré i je* $(\Omega, \mathcal{S}_i)$ σ*-algebra?*

Príklad 2. *Nech* $(\Omega, \mathcal{S})$ *je* σ*-algebra a nech* $A_1, A_2, ... \in \mathcal{S}$. *Nech* B *je množina tých prvkov* $\omega \in \Omega$, *ktoré a) patria do práve jednej spomedzi množín* $A_1, A_2, ...$; *b) patria nekonečne veľa spomedzi množín* $A_1, A_2, ...$; *c) patria do všetkých množín* $A_1, A_2, ...$ *s výnimkou maximálne konečného počtu. Dokážte, že* $B \in \mathcal{S}$.

Príklad 3. *a) Nech* $\Omega = \{a, b, c, d\}$ *a nech* $\mathcal{F} = \{\{a\}, \{b\}\}$. *Nájdite najmenšiu* σ*-algebru* $(\Omega, \mathcal{S})$ *takú, že* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$; *b) Nech* $\Omega = \mathbb{R}$ *a nech* $\mathcal{F} = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$. *Nájdite najmenšiu* σ*-algebru* $(\Omega, \mathcal{S})$ *takú, že* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$. *(Vieme, že zjednotenie spočítateľných množín je spočítateľná množina.)*

Príklad 4. *Dokážte, že* σ*-algebra Borelovských množín na* $\mathbb{R}$ *(t.j.* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$*) je najmenšia* σ*-algebra na* $\mathbb{R}$ *obsahujúca* $\mathcal{A}$, *kde* $\mathcal{A}$ *je a) systém všetkých otvorených intervalov; b) systém všetkých uzavretých intervalov; c) systém všetkých intervalov typu* $(-\infty, a)$, *kde* $a \in \mathbb{R}$. *(Vieme, že akákoľvek otvorená množina v* $\mathbb{R}$ *sa dá vyjadriť ako spočítateľné zjednotenie otvorených intervalov.)*

Príklad 5. *Nech* $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ *je pravdepodobnostný priestor a nech* A, B, C *sú udalosti na tomto priestore. Nech* $B \subset A$, $P(A) = P(C) = 1/2$, $P(B) = P(A \cap C) = 1/4$ *a* $P(B \cap C) = 1/8$. *Nájdite pravdepodobnosť udalostí* $A \setminus (B \cup C)$ *a* $\Omega \setminus (A \cup B \cup C)$.

Príklad 6. *Ukážte, že pre akékoľvek tri udalosti* A, B, C *platí:* $P(A \Delta C) \leq P(A \Delta B) + P(B \Delta C)$. *Symbol* Δ *označuje symetrickú diferenciu množín.*

Príklad 7. *Hádžeme n-krát mincou, o ktorej vieme, že nie je falošná. (T.j. pravdepodobnosť, že padne v jednotlivom hode hlava je rovnaká ako pravdepodobnosť, že padne znak.) Na výsledkoch hádzania nás budú zaujímať len udalosti, ktorých nastatie/nenastatie je jednoznačne určené záznamom o tom, v ktorých hodoch padla hlava a v ktorých hodoch padol znak. Skonštruujte pravdepodobnostný priestor* $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ *vhodný na modelovanie tejto situácie. (T.j. navrhnite postupne* Ω, $\mathcal{S}$ *aj* P.*) Ako by ste definovali* P *v prípade, že minca je falošná, pričom hlava padá v každom hode s pravdepodobnosťou* p?

Príklad 8. *Nech* P *je pravdepodobnostná miera na* σ*-algebre* $(\Omega, \mathcal{S})$ *a nech* $A \in \mathcal{S}$, $P(A) > 0$. *Definujme zobrazenie* $P_A : \mathcal{S} \to [0, 1]$ *nasledovne:* $P_A(B) = P(B \cap A)/P(A)$ *pre všetky* $B \in \mathcal{S}$. *Ukážte, že* P_A *je pravdepodobnostná miera na* $(\Omega, \mathcal{S})$.

Príklad 9. *a) Rovnomerne náhodne volíme bod na štvorci* $\Omega = [-1,1] \times [-1,1]$ *v rovine. Skonštruujte vhodný pravdepodobnostný model na túto situáciu. b) To isté ako v časti a) ale pre prípad, že* Ω *je jednotková kružnica v rovine.*

Príklad 10. *Hodíme súčasne dvomi kockami. Vypočítajte pravdepodobnosť, že* ***a)*** *Na oboch kockách padne rovnaký počet bodiek;* ***b)*** *Na prvej kocke padne viac bodiek ako na druhej;* ***c)*** *Na prvej kocke padne aspoň o dve bodky viac ako na druhej;* ***d)*** *Absolútna hodnota rozdielu bodov na kockách bude 0,1,2, alebo 3;* ***e)*** *Počet bodiek na druhej kocke bude celočíselným násobkom počtu bodiek na prvej kocke (t.j. výsledky budú napríklad* $(1,5)$, $(2,2)$, $(2,4)$ *a podobne).*

Príklad 11 (Buffonova ihla)**.** *V rovine sú zakreslené rovnobežné priamky s rozostupmi* L*. Určte pravdepodobnosť toho, že ak na túto rovinu náhodne hodíme ihlu dĺžky* $l < L$*, tak pretne niektorú z priamok.*

Príklad 12. *Na úsečke dĺžky 1 zvolíme rovnomerne náhodne dva body, ktoré nám rozbijú danú úsečku na tri segmenty. Nájdite pravdepodobnosť, že* ***a)*** *zo vzniknutých segmentov bude možné zložiť trojuholník;* ***b)*** *najkratší vzniknutý segment bude menší ako* $1/4$*;* ***c)*** *najdlhší vzniknutý segment bude väčší ako* $1/2$*.*

Príklad 13. *Za okrúhlym stolom je rozostavených* $n \geq 3$ *stoličiek. Náhodne za tento stôl rozsadíme troch ľudí. Aká je pravdepodobnosť* p_n*, že niektorí dvaja ľudia budú sedieť vedľa seba?* ***Riešenie:*** $p_3 = 1$ *a* $p_n = 6(n-3)/((n-1)(n-2))$ *pre* $n \geq 4$*.*

Príklad 14. *Na množine štyroch vrcholov konštruujeme náhodný neorientovaný graf bez slučiek tým spôsobom, že každú dvojicu vrcholov spojíme s pravdepodobnosťou* p*. Nájdite pravdepodobnosť, že výsledný graf bude obsahovať aspoň jeden izolovaný vrchol.* ***Riešenie:*** *V označení* $q = 1-p$ *je výsledná pravdepodobnosť* $4q^3 - 6q^5 + 3q^6$*.*

Príklad 15. *Nech* P_1 *a* P_2 *sú dve pravdepodobnostné miery na* σ*-algebre* $(\Omega, \mathcal{S})$*. Nech* $\alpha \in [0,1]$*. Definujme funkciu* $P : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ *nasledovne:* $P(A) = \alpha P_1(A) + (1-\alpha)P_2(A)$ *pre každé* $A \in \mathcal{S}$*. Potom* P *je tiež pravdepodobnostná miera na* $(\Omega, \mathcal{S})$*. Dokážte.*

Príklad 16. *Nech* $A_1, A_2, \ldots$ *sú disjunktné udalosti. Z axiomatických vlastností pravdepodobnosti ukážte, že* $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$*.*

Príklad 17. *Dokážte nasledujúce dve tvrdenia: Nech* $A_1, A_2, \ldots$ *sú udalosti nulovej pravdepodobnosti. Potom* $P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = 0$*. Nech* $A_1, A_2, \ldots$ *sú udalosti pravdepodobnosti jedna. Potom* $P(\cap_{i=1}^{\infty} A_i) = 1$*.*

2 Podmieňovanie a nezávislosť udalostí

Príklad 18. *Nositeľov krvných skupín A, B, 0 a AB je v populácii 38, 34, 20 a 8 percent (čísla sú len hypotetické). Určte pravdepodobnosť, že človek náhodne vybratý z populácie môže dostať krv od druhého náhodne vybratého človeka. (Pritom 0 môže darovať krv všetkým skupinám; A môže darovať krv skupinám A,AB; B môže darovať krv skupinám B,AB; AB môže darovať krv len pre skupinu AB.)* ***Riešenie:*** $0,524$.

Príklad 19. *Do semifinále tenisového turnaja postúpili hráči K,L,M a N. V prvom semifinále bude hrať K proti L, v druhom M proti N. Vo finále budú hrať víťazi semifinálových zápasov. Nájdite pravdepodobnosť, že víťazom bude hráč L. Pravdepodobnosti výhier vo vzájomných zápasoch sú nasledovné: Pravdepodobnosť výhry K nad L je* $P(KL) = 0.6$*, ďalej* $P(KM) = 0.7$*,* $P(KN) = 0.8$*,* $P(LM) = 0.6$*,* $P(LN) = 0.7$ *a* $P(MN) = 0.6$*.* ***Riešenie:*** $0,256$.

Príklad 20. *Máme urnu, v ktorej je 5 bielych, 4 modré a 3 červené loptičky. Náhodne vyberieme z urny jednu loptičku. Ak bude biela, vrátime ju do urny spolu s novou bielou loptičkou. Ak bude modrá, vrátime ju do urny spolu s dvomi novými modrými loptičkami. Ak bude červená, vrátime ju do urny spolu s tromi novými červenými loptičkami. Potom budeme ťahať ešte raz jednu loptičku. Určte pravdepodobnosť, že táto loptička bude biela.* ***Riešenie:*** *Približne* $0,397$.

Príklad 21. *Pri vyšetrovaní pacienta je podozrenie na istú zriedkavú infekčnú chorobu* $0,1$ *percenta. Dostupný test pre túto chorobu dáva pozitívny výsledok v* 95 *percentách prípadov pre skutočne infikovanú krv a dáva negatívny výsledok v* 99 *percentách prípadov pre neinfikovanú krv. Aké bude naše pravdepodobnostné očakávanie, že krv je skutočne infikovaná, ak bol daný test pozitívny? Ako sa zvýši naše podozrenie po pozitívnom výsledku nového, úplne nezávislého testu, ktorý má rovnakú spoľahlivosť ako prvý test?* ***Riešenie:*** *Po prvom teste približne* $8,7\%$, *po druhom približne* 90%.

Príklad 22. *Máme 2 vrecká, každé s piatimi zdanlivo rovnakými mincami, no vieme, že v prvom vrecku je jedna falošná minca a v druhom sú dve falošné mince. Náhodne sme z oboch vreciek vytiahli po jednej minci a potom z tejto dvojice sme náhodne vybrali jednu, o ktorej sme sa presvedčili, že je falošná. Aká je pravdepodobnosť, že aj druhá vybratá minca je falošná?* ***Riešenie:*** $4/15$.

Príklad 23. *Štyria strelci A,B,C a D budú nezávisle strieľať na spoločný cieľ, každý po jednom výstrele. Z dlhodobých výsledkov je známe, že strelci zasiahnu čiernu oblasť terča s pravdepodobnosťami: A-*0.9*, B-*0.8*, C-*0.6 *a D-*0.2*. Všetci štyria strelci vystrelili a my sme zistili, že v čiernej oblasti terča je jediný zásah. Aké je naše pravdepodobnostné očakávanie, že tento zásah patrí strelcovi A? Aké je, že patrí strelcovi D?* ***Riešenie:*** *Strelcovi A približne* $0,610$, *strelcovi D približne* $0,017$.

Príklad 24. *Dokážte, že ak* $A \subseteq B$ *a* A, B *sú nezávislé, tak* $P(A) = 0$, *alebo* $P(B) = 1$. *Ďalej dokážte, že ak* A, B *sú nezávislé udalosti nenulovej pravdepodobnosti, potom nie sú disjunktné.*

Príklad 25. *Nech* A, B, C *sú združene nezávislé udalosti. Ukážte, že potom nasledovné dvojice udalostí sú nezávislé:* $A \cap B, C$; $A \setminus B, C$; $A \cup B, C$.

Príklad 26. *Nech* A, B, C *sú združene nezávislé udalosti, pričom* $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$ *a* $P(C) = 1/4$. *Aká je pravdepodobnosť udalosti* $(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$? *Aká je pravdepodobnosť udalosti* $(A\Delta B) \cup (A\Delta C) \cup (B\Delta C)$? ***Riešenie:*** $7/24$ *a* $17/24$.

Príklad 27. *Športovec 3 krát nezávisle vystrelil na cieľ. Pravdepodobnosti zásahov sú postupne 0.5, 0.6 a 0.7. Nájdite pravdepodobnosť toho, že a) v cieli bude aspoň jeden zásah b) v cieli bude práve jeden zásah, c) v cieli budú práve dva zásahy.* ***Riešenie:*** *a)* $0,94$, *b)* $0,29$, *c)* $0,44$.

Príklad 28. *Vykonal sa experiment, ktorý spočíval v krížení bieleho a fialového hrachu, pričom sa predpokladalo, že pokusné rastliny ešte neboli krížené. Podľa pravidiel dedičnosti možno očakávať, že 3/4 nových potomkov rozkvitne na fialovo a 1/4 na bielo. Vzklíčilo 10 rastlín. Určte pravdepodobnosť toho, že a) žiadna rastlina nerozkvitne na bielo b) na fialovo rozkvitnú aspoň tri, c) na fialovo rozkvitne aspoň 6 a najviac 8.* ***Riešenie:*** *Pravdepodobnosť* p_k, *že rozkvitne* k *rastlín na fialovo je* $p_k = \binom{10}{k}(3/4)^k(1/4)^{10-k}$. *Preto odpovede sú a)* p_{10}, *b)* $1 - p_0 - p_1 - p_2$, *c)* $p_6 + p_7 + p_8$.

Príklad 29. *Najprv hodíme červenou kockou (každý z výsledkov 1,2,3,4,5,6 má rovnakú pravdepodobnosť) a potom hodíme naraz toľkými modrými kockami, aké číslo padlo na červenej kocke. Náš výsledok bude rovný počtu padnutých šestiek na modrých kockách. a) Aká je pravdepodobnosť, že výsledok bude 0? b) Aká je pravdepodobnosť, že výsledok bude 2?* ***Riešenie:*** *a)* $0,554$, *b)* $0,096$.

3 Diskrétne náhodné premenné

Príklad 30. *Nech* $(\Omega, \mathcal{S})$ *je priestor udalostí* (σ*-algebra) a nech* $A \subseteq \Omega$. *Definujme zobrazenie* $I_A : \Omega \to \mathbb{R}$ *nasledovne:* $I_A(\omega) = 1$ *pre všetky* $\omega \in A$ *a* $I_A(\omega) = 0$ *pre všetky* $\omega \in \Omega/A$. *(Zobrazenie* I_A *nazývame identifikátorom množiny* A*.) Potom* I_A *je náhodná premenná na tomto priestore vtedy a len vtedy, keď* $A \in \mathcal{S}$. *Dokážte!*

Príklad 31. *Presvedčte sa, že na priestore* $(\Omega, 2^\Omega)$ *je každé zobrazenie* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *náhodnou premennou a na priestore* $(\Omega, \{\Omega, \emptyset\})$ *sú náhodnými premennými len konštantné zobrazenia. Popíšte množinu všetkých náhodných premenných na* σ*-algebre* $(\Omega, \{\Omega, \{0,1\}, \{2\}, \emptyset\})$, *kde* $\Omega = \{0, 1, 2\}$.

Príklad 32. *Uvažujme pravdepodobnostný priestor* $(\Omega, 2^\Omega, P)$, *kde* $\Omega = \{1, ..., 6\}$ *a* $P(A) = |A|/6$ *pre* $A \subseteq \Omega$. *Nájdite distribučnú funkciu a strednú hodnotu náhodných premenných* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *definovaných a)* $X(\omega) = \omega$; *b)* $X(\omega) = \omega \mod 4$ *pre všetky* $\omega \in \Omega$.

Príklad 33. *Drevenú kocku natrieme zo všetkých strán modrou farbou a potom ju rozpílime na 27 kociek identickej veľkosti. Z týchto kociek náhodne vyberieme jednu (každú s pravdepodobnosťou 1/27). Nech* X *znamená koľko stien vybratej kocky je zafarbených na modro. Pre náhodnú premennú* X *načrtnite distribučnú funkciu a nájdite* $E(X)$ *a* $D(X)$. ***Riešenie:*** $E(X) = 2$, $D(X) = 2/3$.

Príklad 34. *V urne máme loptičky s číslami 1,...,n, pričom* $n \geq 2$. *Z tejto urny vyberieme náhodne dve loptičky (súčasne). Nech* X *označuje minimum z čísiel na vybratých loptičkách. Nájdite rozdelenie náhodnej premennej* X *a vypočítajte* $E(X)$. *Môžete použiť vzťah:* $\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) = (n^3 - n)/6$. ***Riešenie:*** $(n+1)/3$

Príklad 35. *V urne sú loptičky s číslami* $1, 2, ..., n$. *Náhodne vyberieme* m *z týchto loptičiek (bez návratu; predpokladáme že* $n \geq m$*). Nech* X *označuje minimum z čísiel na týchto* m *vybratých loptičkách. Nájdite rozdelenie náhodnej premennej* X. *Ukážte, že* $E(X) = \sum_{k=1}^{n-m+1} P[X \geq k] = \frac{n+1}{m+1}$. *(Môžete použiť rovnosť:* $\sum_{j=0}^{n-m} \binom{m+j}{m} = \binom{n+1}{m+1}$*.)*

Príklad 36. *Na začiatku je v urne jedna biela loptička a jedna čierna loptička. Opakovane z urny vyberáme loptičku, pričom dodržiavame tento postup: Ak je vybratá loptička čierna, tak do urny túto čiernu loptičku vrátime, spolu s ňou do urny pridáme jednu bielu loptičku a opäť ťaháme. Ak je vybratá loptička biela tak skončíme. Nech* X *znamená počet výberov loptičky (do vytiahnutia prvej bielej.) Nájdite rozdelenie a strednú hodnotu náhodnej premennej* X. ***Riešenie:*** $e - 1$.

Príklad 37. *Náhodná premenná* X *nadobúda hodnoty* $1, 2, 3, \ldots$. *Presvedčte sa, že potom platí* $E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} P[X \geq k]$. *Pomocou tejto rovnosti nájdite strednú hodnotu náhodnej premennej* X *z príkladu 36.*

Príklad 38. *Hodíme n-krát mincou. Sériou nazveme postupnosť za sebou idúcich rovnakých výsledkov, pred a za ktorými je výsledok opačný, alebo žiadny (t.j. začiatok, alebo koniec). Napríklad pri* $n = 8$ *obsahuje výsledok "HZZZHHHH" tri série, výsledok "HZHZZHZH" 7 sérií. Nech* X *znamená výsledný počet sérií. Nájdite rozdelenie náhodnej premennej* X, *t.j. hodnoty* $P[X = k]$ *pre* $k = 1, \ldots, 8$. *Nájdite* $E(X)$ *a* $D(X)$. ***Riešenie:*** $P[X = k] = \binom{n-1}{k-1} 2^{1-n}$, $E(X) = (n-1)/2 + 1$, $D(X) = (n-1)/4$.

Príklad 39. *Pre potreby genetického algoritmu modelujeme "chromozóm dĺžky n" postupnosťou n binárnych hodnôt 0 alebo 1. Nech* x *je chromozóm pozostávajúci z* k *jednotiek a* $n - k$ *núl.*

Chromozóm y vytvoríme z chromozómu x náhodnou "mutáciou", t.j. tak, že každý bit preklopíme na opačný s pravdepodobnosťou p. Nájdite rozdelenie a strednú hodnotu počtu bitov, v ktorých sa bude líšiť x od y.

Príklad 40. *Pri prenášaní binárnych dát komunikačnou linkou dochádza k zámene bitu (*0 *na* 1 *alebo* 1 *na* 0*) s pravdepodobnosťou* 4×10^{-9}. *Pomocou aproximácie binomického rozdelenia Poissonovym určte pravdepodobnosť, že v súbore veľkosti* 10^9 *bitov sa a) všetky bity prenesú správne b) zle prenesú* 2 *až* 4 *bity* ***Riešenie:*** *a)* e^{-4}*; b)* $e^{-4}(4^2/2! + 4^3/3! + 4^4/4!)$.

Príklad 41. *Z dlhodobých štatistík je známe, že od 9:00 do 10:00 počas bežného pracovného dňa zaznamená náš internetový server priemerne dve požiadavky na prístup. Budeme teda predpokladať, že počet požiadaviek o prístup má počas danej hodiny Poissonove rozdelenie so strednou hodnotou 2. (Počas stabilnej prevádzky má server s veľkým počtom potenciálnych, navzájom sa nezávisle správajúcich užívateľov rozdelenie, ktoré je možné dobre aproximovať Poissonovym rozdelením.) Odhadnite pravdepodobnosť, že počas tejto hodiny sa o prístup pokúsi aspoň k užívateľov,* $k = 1, 2, 3$. ***Riešenie:*** *Ak X je počet pokusov o prístup, tak jednoducho* $P[X = k] = e^{-\lambda}\lambda^k/k!$, *kde* $\lambda = 2$.

Príklad 42. *Basketbalisti A a B sa striedajú pri hádzaní na kôš až pokým sa nestane to, že jeden z nich v danom kole trafí a druhý netrafí. Strelec A zasiahne kôš s pravdepodobnosťou* p_A *a strelec B zasiahne kôš s pravdepodobnosťou* p_B. *Nájdite strednú hodnotu počtu kôl v tejto súťaži.* ***Riešenie:*** $(p_A + p_B - 2p_Ap_B)^{-1}$.

Príklad 43. *Dvaja hráči A a B striedavo hádžu kockou v poradí ABABAB... Hru vyhrá hráč A, ak mu skôr padne jedno z čísiel* $1, 2$, *než padne hráčovi B jedno z čísiel* $1, 2, 3$ *(v takomto prípade vyhráva hráč B). Ktorý hráč vyhrá s väčšou pravdepodobnosťou? Aká je stredná hodnota počtu hodov kockou v tejto súťaži?*

Príklad 44. *V lotérii sa losujú* 3 *rôzne čísla z* 13. *Ak uhádneme všetky tri čísla, tak vyhráme* 1000 *(jednotiek bližšie nešpecifikovanej meny), ak uhádneme dve čísla, vyhráme* 100 *a ak uhádneme jedno číslo, vyhráme* 10. *Aká je stredná hodnota výhry?* ***Riešenie:*** *Približne* $18, 7$.

Príklad 45. *V zbierke* 16 *mincí je* 8 *falošných. Z týchto mincí sme náhodne vybrali* 4. *Nech X označuje koľko je spomedzi vybratých mincí falošných. Nájdite rozdelenie náhodnej premennej X. Aká je stredná hodnota X?* ***Riešenie:*** $P[X = k] = \binom{8}{k}\binom{8}{4-k}/\binom{16}{4}$ *pre* $k = 0, 1, 2, 3, 4$. $E(X) = 2$.

Príklad 46. *Budeme hádzať hracou kockou až dovtedy, kým aspoň raz nezaznamenáme každý z možných výsledkov* $1, \dots, 6$. *Nech X označuje počet hodov. Nájdite* $E(X)$*!* ***Riešenie:*** $E(X) = 14, 7$.

Príklad 47. *Extremálnym bodom postupnosti* $(x_i)_{i=1}^n$, $n \geq 3$ *reálnych čísel nazveme každý index* $i \in \{2, \dots, n-1\}$, *pre ktorý platí* $x_{i-1} < x_i > x_{i+1}$, *alebo* $x_{i-1} > x_i < x_{i+1}$. *Nech postupnosť náhodných premenných* $(X_i)_{i=1}^n$ *zodpovedá číselným výsledkom n hodov kockou. Nájdite strednú hodnotu počtu extremálnych bodov tejto postupnosti!* ***Riešenie:*** $(n-2) \times (110/6^3)$.

Príklad 48. *Na množine n vrcholov konštruujeme náhodný neorientovaný graf bez slučiek tým spôsobom, že každú dvojicu vrcholov spojíme s pravdepodobnosťou p. Nech náhodná premenná X reprezentuje počet izolovaných vrcholov výsledného grafu. Nájdite* $E(X)$ *a* $D(X)$*!* ***Riešenie:*** *Ak označíme* $q = 1 - p$ *tak* $E(X) = nq^{n-1}$ *a* $D(X) = (n^2 - n)q^{2n-3} + nq^{n-1} - n^2q^{2n-2}$

Príklad 49. *Vo vreci máme pomiešaných* 20 *ponožiek, ktoré zodpovedajú* 10*-tim párom. Náhodne z nich vyberieme* 10 *kusov ponožiek. Aká je stredná hodnota počtu párov, ktoré sa dajú zložiť z vybratých ponožiek?*

Príklad 50. *Nájdite strednú hodnotu počtu jednotiek v chromozóme y z príkladu 39.* ***Riešenie:*** $(n-k)p + k(1-p)$

4 Spojité náhodné premenné

Príklad 51. *Uvažujme pravdepodobnostný priestor* $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, *kde* $\Omega = (0,1)$, $\mathcal{S}$ *je systém borelovských podmnožín intervalu* $(0,1)$ *a* P *je pravdepodobnosť na* σ*-algebre* $(\Omega, \mathcal{S})$, *pričom* $P((a,b)) = b - a$ *pre* $0 < a < b < 1$. *Nájdite distribučnú funkciu a hustotu náhodných premenných* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *definovaných a)* $X(\omega) = \omega$; *b)* $X(\omega) = \omega^2$; *c)* $X(\omega) = -\ln(\omega)$ *pre všetky* $\omega \in \Omega$.

Príklad 52. *Nech* X *je náhodná premenná a nech pre akékoľvek* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *platí* $P[X = a] = 0$ *a* $P[X \in (a,b)] > 0$. *Potom distribučná funkcia* F *náhodnej premennej* X *je bijektívne zobrazenie z* $\mathbb{R}$ *do intervalu* $(0,1)$. *Dokážte!*

Príklad 53. *Nech* $a, b \in \mathbb{R}$, *pričom* $a > 1, b > 0$. *Náhodná premenná* X *má distribučnú funkciu* $F(x) = 0$ *pre* $x \leq b$ *a* $F(x) = 1 - (b/x)^a$ *pre* $x > b$. *Určte hodnoty* a, b. *Nájdite hustotu a strednú hodnotu náhodnej premennej* X. ***Riešenie:*** *Hustota je* $f(x) = 0$ *pre* $x \leq b$ *a* $f(x) = ab^a x^{-a-1}$ *pre* $x > b$. $E(X) = ab/(a-1)$.

Príklad 54. *Nech* $\mu, \Delta \in \mathbb{R}$, *kde* $\Delta > 0$ *a nech spojitá náhodná premenná* X *má hustotu* $f(x) = (\Delta - |x - \mu|)/\Delta^2$ *pre* $x \in [\mu - \Delta, \mu + \Delta]$ *a* $f(x) = 0$ *inak. Nájdite distribučnú funkciu, strednú hodnotu a disperziu* X. ***Riešenie:*** *Distribučná funkcia* X *je* $F(x) = F_{0,1}((x-\mu)/\Delta)$, *pričom* $F_{0,1}(x) = 0$ *pre* $x < -1$, $F_{0,1}(x) = x^2/2 + x + 1/2$ *pre* $x \in [-1, 0]$, $F_{0,1}(x) = -x^2/2 + x + 1/2$ *pre* $x \in [0,1]$ *a* $F_{0,1}(x) = 1$ *pre* $x > 1$. *Číselné charakteristiky sú* $E(X) = \mu$ *a* $D(X) = \Delta^2/6$.

Príklad 55. *Nech* U *je náhodná premenná s distribučnou funkciou* F_U, *pričom* $F_U(u) = u$ *pre každé* $u \in (0,1)$. *Predpokladajme, že* F *je rastúca spojitá funkcia, pre ktorú platí* $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *a* $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$. *Potom* $X = F^{-1}(U)$ *je náhodná premenná s distribučnou funkciou* F. *Dokážte!*

Príklad 56. *Bod* B *volíme rovnomerne náhodne na kružnici so stredom v* $(0,0)$ *a polomerom* 1. *(T.j.* B *volíme na hranici kruhu so stredom v* $(0,0)$ *a polomerom* 1 *a to tak, že uhol určený bodmi* $(1,0), (0,0), B$ *má rovnomerné rozdelenie na intervale* $[0, 2\pi]$.*) Nech* S *znamená obsah a trojuholníka určeného bodmi* $(-1,0), (1,0), B$. *Nájdite distribučnú funkciu, hustotu a strednú hodnotu náhodnej premennej* S. ***Riešenie:*** *Distribučná funkcia* S *je* $F(s) = 0$ *pre* $s < 0$, $F(s) = (2/\pi)\arcsin(s)$ *pre* $s \in [0,1]$ *a* $F(s) = 1$ *pre* $s > 1$; *hustota je* $f(s) = 2/(\pi\sqrt{1-s^2})$ *pre* $s \in (0,1)$ *a* $f(s) = 0$ *pre* $s \notin (0,1)$ *a* $E(S) = 2/\pi$.

Príklad 57. *Zvolíme rovnomerne náhodne uhol* ϕ *v intervale* $(0, \pi/2)$ *a pod týmto uhlom vystrelíme projektil rýchlosťou* v_0. *Nech* T *znamená čas od výstrelu po dopadnutie projektilu na zem, t.j.* $T = 2v_0 g^{-1} \sin(\phi)$, *kde* g *je gravitačné zrýchlenie. Nájdite hustotu a strednú hodnotu náhodnej premennej* T.

Príklad 58. *Nech náhodná premenná X má distribučnú funkciu $F(x) = a + b\arctan(x)$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$, kde a, b sú reálne konštanty. Určte hodnoty a, b. Nájdite hustotu premennej X. Nájdite distribučnú funkciu a hustotu náhodnej premennej $Y = 1/X$. (Predpokladáme, že $[X = 0] = \emptyset$.)* ***Riešenie:*** *$a = 1/2$, $b = 1/\pi$, hustota: $f(x) = 1/\left(\pi(1 + x^2)\right)$, Y má distribučnú funkciu a hustotu rovnakú ako X.*

Príklad 59. *Bod B volíme rovnomerne náhodne na jednotkovej kružnici v rovine. Nech L znamená vzdialenosť bodu B od bodu $(1, 0)$. Nájdite distribučnú funkciu, hustotu a strednú hodnotu náhodnej premennej L.*

Príklad 60. *Nech náhodná premenná X má exponenciálne rozdelenie s parametrom $\lambda > 0$. Dokážte, že náhodná premenná $Y = \lfloor X \rfloor$ (dolná celá časť X) má geometrické rozdelenie s parametrom $1 - e^{-1/\lambda}$.*

Príklad 61. *Nech $X \sim Exp(\lambda)$ a nech $Y = e^{-X}$. Nájdite distribučnú funkciu, hustotu a strednú hodnotu náhodnej premennej Y.*

Príklad 62. *Nech $X \sim N(0, 1)$. Nájdite hustotu náhodnej premennej $Y = e^X$ a náhodnej premennej $Z = X^2$. (Rozdelenie náhodnej premennej Y sa nazýva "chíkvadrát s jedným stupňom voľnosti" a rozdelenie náhodnej premennej Z je takzvané lognormálne rozdelenie.)*

Príklad 63. *Nech náhodná premenná X má rozdelenie $N(\mu, \sigma^2)$ a nech $a < b$. Vyjadrite pomocou distribučnej funkcie Φ rozdelenia $N(0, 1)$ hodnotu $P[X \in (a, b)]$ a hodnotu $P[|X - \mu| < k\sigma]$, kde $k \in \mathbb{R}$.*

Príklad 64. *Nech $X \sim N(100, 225)$. Vyčíslite $P[X \in (-85, 115)]$, $P[X \in (70, 130)]$ a $P[X \in (55, 145)]$. Nájdite také δ, že $P[100 - \delta < X < 100 + \delta] = 1/2$. Použite tabuľky distribučnej funkcie Φ rozdelenia $N(0, 1)$ a kvantilovej funkcie Φ^{-1} rozdelenia $N(0, 1)$, alebo vhodný software.* ***Riešenie:*** *$P[X \in (-85, 115)] \approx 0,683$, $P[X \in (70, 130)] \approx 0,954$ a $P[X \in (55, 145)] \approx 0,997$. $\delta \approx 10$.*

Príklad 65. *Rozmer vyrábanej súčiastky má približne normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\mu = 1000$ mm. Výrobok považujeme za dobrý, ak sa jeho rozmer nelíši od 1000 mm o viac ako 1 mm. Aká musí byť disperzia rozmeru súčiastok, aby pomer nepodarkov neprekračoval 1 percento? Výsledok vyjadrite pomocou kvantilovej funkcie Φ^{-1} rozdelenia $N(0, 1)$.* ***Riešenie:*** *$\sigma^2 \leq (1/\Phi^{-1}(0.995))^2$*

Príklad 66. *Hádžeme 200 krát šípkou na terč, pričom pravdepodobnosť zásahu je v každom hode 0.6. Pomocou aproximácie binomického rozdelenia normálnym približne určte pravdepodobnosť, že terč zasiahneme menej ako 105-krát.* ***Riešenie:*** *Pomocou aproximácie rozdelením $N(0, 1)$ dostaneme $\Phi(-2.165) \approx 0,015$ (skutočná hodnota je približne $0,013$).*

Príklad 67. *Pomocou aproximácie binomického rozdelenia normálnym a tabuliek funkcie Φ približne vyčíslite pravdepodobnosť, že po 10000 hrách so stávkou 1 dolár na červenú alebo čiernu farbu v rulete bude kasíno ziskové. Vieme, že pravdepodobnosť výhry pri stávke na ktorúkoľvek farbu je $18/37$, pretože $1/37$ je pravdepodobnosť padnutia (zelenej) nuly. Pri výhre dostáva hráč naspäť vsadený dolár plus jeden dolár výhry. Pri prehre hráč prehráva vsadený dolár.* ***Riešenie:*** *Približne $0,9965$.*

Príklad 68. *Pravdepodobnosť $p \in (0, 1)$ istej udalosti chceme odhadnúť n nezávislými simulačnými experimentami ako podiel $\overline{p}_n$ tých experimentov, v ktorých daná udalosť nastane. Pomocou aproximácie binomického rozdelenia normálnym nájdite (odhadnite) aké musí byť n, aby (pre akúkoľvek skutočnú hodnotu p) platilo: $P[|\overline{p}_n - p| < 0.001] > 0.999$.*

5 Diskrétne náhodné vektory

Príklad 69. *Hodíme súčasne dvomi hracími kockami. Nech X znamená na koľkých kockách padlo jedno z čísiel $1, 2, 3, 4$ a Y nech znamená na koľkých kockách padlo jedno z čísiel $3, 4, 5, 6$. (T.j. X aj Y môžu nadobudnúť len hodnoty 0,1, alebo 2.) Popíšte distribučnú funkciu F náhodného vektora $(X, Y)^T$ napríklad tým spôsobom, že určíte množiny $B_0, B_1, ..., B_9$, ktorých zjednotenie je $\mathbb{R}^2$ a pre $i = 0, ..., 9$ platí: $F(x, y) = i/9$ pre všetky $(x, y) \in B_i$. (Niektoré z množín B_i môžu byť aj prázdne.)*

Príklad 70. *Vo vrecku máme všetkých 2^n podmnožín množiny $\{1, 2, ..., n\}$ (vrátane prázdnej množiny). Z vrecka najprv náhodne vyberieme množinu E, vrátime ju späť a po chvíľke vyberieme ďalšiu množinu F. Nech náhodná premenná X znamená počet prvkov zjednotenia E a F; Y nech znamená počet prvkov prieniku E a F. Nájdite rozdelenie náhodného vektora $(X, Y)^T$, t.j. pravdepodobnosti $P[X = x, Y = y]$, kde $x, y \in \{0, 1, ..., n\}$. Popíšte distribučnú funkciu náhodného vektora $(X, Y)^T$ pre $n = 2$. **Riešenie:** $P[X = x, Y = y] = \binom{n}{x}\binom{x}{y}2^{x-y-2n}$ pre všetky $x, y \in \{0, 1, ..., n\}$ také, že $x \geq y$.*

Príklad 71. *V lotérii sa losuje 6 čísiel zo 49. Vyhráme cenu v i-tom poradí (pre $i = 1, ..., 7$), ak uhádneme práve $7 - i$ čísiel z nami tipovaných šiestich. Predpokladajme, že lotérie sa zúčastní 100000 tipujúcich, ktorí si volia tipovanú šesticu čísiel navzájom nezávisle a rovnomerne náhodne na množine všetkých 6-prvkových podmnožín množiny $\{1, ..., 49\}$. Nech X_i je náhodná premenná, ktorá znamená počet výhier v i-tom poradí. Nájdite rozdelenie diskrétneho náhodného vektora $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_7)^T$, t.j. pravdepodobnosti $P[\mathbf{X} = \mathbf{x}]$ pre všetky $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^7$. Čomu sa rovná $E(\mathbf{X})$?*

Príklad 72. *Máme dve urny, pričom v oboch sú 4 loptičky s číslami $1, 2, 3, 4$. Z urien vyberieme po jednej očíslovanej loptičke. Nech X znamená minimum z dvojice vylosovaných čísiel a Y znamená maximum z vylosovanej dvojice čísiel. Nájdite rozdelenie náhodnej premennej X a náhodnej premennej Y. Overte, že X a Y nie sú nezávislé. Vypočítajte korelačný koeficient premenných X a Y. **Riešenie:** $E(X) = 30/16$, $E(Y) = 50/16$, $D(X) = D(Y) = 70/16 - (30/16)^2$, $E(XY) = 100/16$. Z toho $\rho(X, Y) = 5/11$. Premenné X a Y nie sú nezávislé, pretože napríklad $P[X = 4, Y = 1] \neq P[X = 4]P[Y = 1]$.*

Príklad 73. *Vo vrecku sú 4 kartičky, pričom na dvoch z nich je napísané číslo 1 a na zvyšných dvoch je napísané číslo 2. Z vrecka náhodne vyberieme prvú kartičku a po chvíli náhodne vyberieme druhú kartičku (pred výberom druhej kartičky prvú vybratú kartičku do vrecka nevraciame.) Nech X znamená súčet čísiel na vytiahnutých kartičkách a Y nech znamená rozdiel čísiel na vytiahnutých kartičkách. (T.j. Y je číslo na prvej kartičke mínus číslo na druhej kartičke.) Zdôvodnite, prečo sú premenné X a Y závislé. Vypočítajte kovarianciu náhodných premenných X a Y. **Riešenie:** X a Y nie sú nezávislé, lebo napríklad $P[X = 2, Y = 1] \neq P[X = 2]P[Y = 1]$. Napriek tomu $cov(X, Y) = 0$.*

Príklad 74. *Nech diskrétne náhodné premenné X, Y sú nekorelované a obe nadobúdajú s nenulovou pravdepodobnosťou len hodnotu a, alebo hodnotu b, kde a, b sú konštanty. Potom X a Y sú nezávislé. Dokážte!*

Príklad 75. *Na intervale $(0, 1)$ zvolíme n bodov rovnomerne náhodne a navzájom nezávisle. Uvažujme pevné $p \in (0, 1)$. Nech X znamená počet bodov, ktoré padnú do intervalu $(0, p)$ a nech Y znamená počet bodov, ktoré padnú do intervalu $(1 - p, 1)$. Nájdite korelačný koeficient náhodných premenných X a Y. **Riešenie:** $\rho(X, Y) = p/(p - 1)$ pre $p \in (0, 1/2]$ a $\rho(X, Y) = (p - 1)/p$ pre $p \in [1/2, 1)$.*

Príklad 76. *Nech $X_1, ..., X_n$ sú nezávislé náhodné premenné s rovnomerným rozdelením na množine $\{0,1,2\}$, t.j. $P[X_1 = k_1, ..., X_n = k_n] = 1/3^n$ ak $k_1, ..., k_n \in \{0,1,2\}$. Nájdite strednú hodnotu náhodnej premennej $Y = \min\{X_1, ..., X_n\}$.* ***Riešenie:*** *$E(Y) = (1/3)^n + (2/3)^n$*

6 Spojité náhodné vektory

Príklad 77. *Spojitý náhodný vektor $(X,Y)^T$ má hustotu: $f(x,y) = c.(1-|x|-|y|)$ pre tie $x, y \in \mathbb{R}$, pre ktoré je $|x| + |y| < 1$ a $f(x,y) = 0$ inak. Nájdite hodnotu konštanty c, ďalej rozdelenie náhodnej premennej X a pravdepodobnosť, že vektor $(X,Y)^T$ padne do štvorca $(-1/2, 1/2) \times (-1/2, 1/2)$. Sú náhodné premenné X a Y nezávislé?* ***Riešenie:*** *$c = 3/2$; $f_X(x) = (3/2)(1-|x|)^2$ pre $x \in (-1,1)$, inde 0; $P = 3/4$; X a Y nie sú nezávislé.*

Príklad 78. *Spojitý náhodný vektor $(X,Y)^T$ má takto definovanú hustotu: $f(x,y) = 3(1-x+y)$ pre $(x,y) \in T$ a $f(x,y) = 0$ pre $(x,y) \notin T$, kde T je trojuholník s vrcholmi $(0,0)$, $(1,0)$ a $(1,1)$. Nájdite hustoty náhodných premenných X a Y.*

Príklad 79. *Nech X a Y sú nezávislé spojité náhodné premenné, obe s rovnomerným rozdelením na intervale $(0,1)$. Nájdite hustotu náhodných premenných $X+Y$, XY, X/Y (ak $[Y = 0] = \emptyset$).*

Príklad 80. *Nech $X_1, ..., X_m$ sú nezávislé náhodné premenné, všetky s rozdelením $R(0,1)$. Nájdite hustotu náhodných premenných $L = \min\{X_1, ..., X_m\}$ a $U = \max\{X_1, ..., X_m\}$.* ***Riešenie:*** *Hustota L je $f_L(l) = m(1-l)^{m-1}$ pre $l \in (0,1)$ a $f_L(l) = 0$ pre $l \notin (0,1)$. Hustota U je $f_U(u) = mu^{m-1}$ pre $u \in (0,1)$ a $f_U(u) = 0$ pre $u \notin (0,1)$.*

Príklad 81. *Nech náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_m)^T$ má rovnomerné rozdelenie na jednotkovej guli, t.j. hustota $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_m)^T$ je konštantná na množine $S_m(1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i^2 \leq 1\}$. Nech náhodná premenná R reprezentuje euklidovu vzdialenosť $\mathbf{X}$ od bodu $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$, t.j. $R = \sqrt{\sum_{i=1}^m X_i^2}$. Nájdite hustotu a strednú hodnotu náhodnej premennej R. Objem m-rozmernej gule s polomerom $r > 0$ je $vol(S_m(r)) = c_m r^m$, kde $c_m = 2\pi^{m/2}/(m\Gamma(m/2))$.*

Príklad 82. *Nech náhodné premenné $X_1, ..., X_m$ sú nezávislé s rovnomerným rozdelením na intervale $(-1,1)$. Určte $P[(X_1, ..., X_m)^T \in S_m(1)]$. (Stačí pre párne m s využitím vzťahu $\Gamma(k) = (k-1)!$ pre všetky $k \in \mathbb{N}$.)*

Príklad 83. *Bod A volíme rovnomerne náhodne na jednotkovom štvorci v rovine, t.j súradnice X, Y bodu A predstavujú spojitý náhodný vektor s hustotou konštantnou na $S = [0,1] \times [0,1]$ a nulovou mimo S (rovnomerné rozdelenie na S). Nech náhodná premenná L je vzdialenosť A od hranice štvorca S. Nájdite hustotu a strednú hodnotu náhodnej premennej L.*

Príklad 84. *Nech N je náhodná premenná nadobúdajúca hodnoty $1, 2, ..., n$, každú s pravdepodobnosťou $1/n$. Uvažujme náhodné premenné $X_1, ..., X_n$, pričom pre každé $i \in \{1, ..., n\}$ je X_i nezávislá na N a má rozdelenie $Exp(i)$. Nájdite distribučnú funkciu a hustotu náhodnej premennej X_N.*

Príklad 85. *Systém sa skladá z n blokov. Nech X_i je doba bezporuchovej práce i-teho bloku. Predpokladajme, že náhodné premenné $X_1, ..., X_n$ sú nezávislé a všetky majú rozdelenie $Exp(\lambda)$, kde $\lambda > 0$. Nájdite rozdelenie doby T práce systému (t.j. hustotu spojitej náhodnej premennej T) ak vieme, že systém prestane pracovať a) vtedy, keď vypadne ktorýkoľvek z blokov; b) až vtedy, keď vypadnú všetky bloky.*

Príklad 86. *Nech X a Y sú nezávislé náhodné premenné s rovnomerným rozdelením na $(0,1)$. Definujme $U = \min\{X, Y\}$ a $V = \max\{X, Y\}$. Nájdite korelačný koeficient premenných U a V.* ***Riešenie:*** *$\rho(U,V) = 1/2$.*

Príklad 87. *Nech X a Y sú nezávislé náhodné premenné s rozdelením $N(\mu, \sigma^2)$, kde $\sigma > 0$. Nech $V = X + Y$. Nájdite korelačný koeficient náhodných premenných X a V.* ***Riešenie:*** $\rho(X, V) = 1/\sqrt{2}$

Príklad 88. *Nech X a Y sú nezávislé náhodné premenné, obe s normalizovaným normálnym rozdelením. Definujme $V = X + Y$ a $Z = X - Y$ a nájdite hustotu náhodných premenných V a Z. Ukážte, že V a Z sú nezávislé.* ***Riešenie:*** *Hustota oboch náhodných premenných je daná predpisom $\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-x^2/4}$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$.*

Príklad 89. *Vyjadrite $P[|X - Y| < 1]$ pomocou distribučnej funkcie Φ rozdelenia $N(0, 1)$ pre prípady a) X a Y sú nezávislé náhodné premenné s rozdelením $N(0, 1)$; b) $(X, Y)'$ má združene normálne rozdelenie, $X, Y \sim N(0, 1)$ a $cov(X, Y) = 1/2$.*

Príklad 90. *Nech X, Y, Z sú nezávislé náhodné premenné s rozdelením $N(100, 15^2)$. Pomocou distribučnej funkcie Φ rozdelenia $N(0, 1)$ vyjadrite pravdepodobnosti týchto udalostí a) $[85 < (1/3)(X + Y + Z) < 115]$; b) $[\min\{X, Y, Z\} > 115]$; c) $[\max\{X, Y, Z\} > 115]$.* ***Riešenie:*** *a) $2\Phi(15/\sqrt{75}) - 1 \approx 0,917$; b) $(1 - \Phi(1))^3 \approx 0,004$; c) $1 - (\Phi(1))^3 \approx 0,404$.*

7 Testovanie štatistických hypotéz

Príklad 91. *Merali sme priemer vačkového hriadeľa na 250 súčiastkach. Predpokladajme, že sledovaný znak má rozdelenie $N(\mu, \sigma^2)$, kde μ a σ^2 sú neznáme. Z výsledkov merania sme vypočítali výberový priemer 995,6 a výberový rozptyl 134,7. Na hladine významnosti $\alpha = 0,01$ testujte hypotézu a) $H_0 : \mu = 1000$ voči $H_1 : \mu \neq 1000$; b) $H_0 : \sigma^2 = 100$ voči $H_1 : \sigma^2 > 100$. Potrebné kvantily sú nasledovné: $t_{249}(0,995) = 2,60$, $\chi^2_{249}(0,99) = 303,84$.*

Príklad 92. *Merali sme hmotnosť účinnej látky v 32 tabletkách aspirinu. Predpokladáme, že hmotnosť účinnej látky v tabletkách má rozdelenie $N(\mu, \sigma^2)$, kde μ a σ^2 sú neznáme. Z výsledkov merania sme vypočítali výberový priemer 330,5225 g a výberový rozptyl 2,451 g^2. Testuje hypotézu, že stredná hodnota hmotnosti účinnej látky v tabletkách aspirinu je 330 gramov. Použite hladinu významnosti $\alpha = 0,05$. Potrebný kvantil je $t_{31}(0,975) = 2.04$.*

Príklad 93. *Z veľkého súboru rezistorov rovnakého typu a nominálnej hodnoty sme vybrali 16 kusov. Na základe dlhodobých skúseností môžeme predpokladať, že v základnom súbore majú hodnoty odporu rezistorov v $k\Omega$ rozdelenie $N(\mu, \sigma^2)$, avšak μ a σ^2 sú neznáme. Výberový priemer odporu vybratých rezistorov je 9,3 $k\Omega$ a výberový rozptyl je 6,25 $(k\Omega)^2$. Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ testujte hypotézu a) $H_0 : \mu = 10\ k\Omega$ voči $H_1 : \mu \neq 10\ k\Omega$; b) $H_0 : \sigma^2 = 4\ (k\Omega)^2$ voči $H_1 : \sigma^2 > 4\ (k\Omega)^2$. Vieme, že $t_{15}(0,975) = 2,13$, $\chi^2_{15}(0,95) = 25,0$.*

Príklad 94. *Pri stanovení obsahu dinitrokresolu v prípravku na postrek sa používa polarografická (P) a titračná metóda (T). Na ôsmich vzorkách bol stanovený obsah dinitrokresolu obidvomi metódami. Výsledky sú dané nasledovnou tabuľkou:*

18.60	*27.60*	*27.50*	*25.00*	*24.50*	*26.80*	*29.50*	*26.50*
18.58	*27.37*	*27.70*	*24.64*	*24.10*	*26.33*	*29.33*	*26.63*

Predpokladáme, že výsledky meraní polarografickou metódou tvoria náhodný výber z normálneho rozdelenia so strednou hodnotu μ_P a výsledky meraní titračnou metódou tvoria náhodný výber z normálneho rozdelenia so strednou hodnotou μ_T. (Dvojice meraní na jednotlivých vzorkách však nie sú nezávislé.) Na hladine významnosti $\alpha = 0,05$ testujte hypotézu, že obe metódy dávajú *v strednej hodnote rovnaké výsledky, t.j. hypotézu* $H_0 : \Delta = 0$ *voči* $H_1 : \Delta \neq 0$*, kde* $\Delta = \mu_P - \mu_T$*. Návod: Diferencie meraní na jednotlivých vzorkách tvoria náhodný výber z normálneho rozdelenia so strednou hodnotou* Δ*. Potrebný kvantil je* $t_7(0,975) = 2,365$.

Príklad 95. *Pri testovaní diaľkomeru sme urobili* 16 *nezávislých meraní vzdialenosti ku kontrolnému objektu. Výberový priemer a výberový rozptyl chýb diaľkomeru z týchto meraní bol* $\bar{X}_1 = -0,03$ *km, resp.* $S_1^2 = 0,0324$ *km*^{2}*. Po nastavení prístroja sa urobilo ešte* 18 *nezávislých meraní, pričom výberový priemer chýb bol pre tieto merania* $\bar{X}_2 = 0,05$ *km a výberový rozptyl* $S_2^2 = 0,0225$ *km*^{2}*. Ak predpokladáme, že chyby meraní majú normálne rozdelenie s konštantnou disperziou, možno tvrdiť, že nastavením sa zmenila systematická chyba diaľkomeru? Voľte hladinu významnosti* $\alpha = 0,01$*. Potrebný kvantil je* $t_{32}(0,995) = 2,738$.

Príklad 96. *Na dvoch sústruhoch sa vyrábajú súčiastky, pri ktorých sa kontroluje vnútorný priemer. Z produkcie prvého sústruhu sme urobili náhodný výber s rozsahom* $n_1 = 16$ *a z produkcie druhého sústruhu sme urobili náhodný výber s rozsahom* $n_2 = 25$ *súčiastok. Príslušné výberové priemery a výberové disperzie sú* $\bar{Y}_1 = 37,5$ *mm,* $S_1^2 = 1,21$ *mm*^{2}*,* $\bar{Y}_2 = 36,8$ *mm,* $S_1^2 = 1,44$ *mm*^{2}*. Predpokladáme, že výber z každého zo sústruhov má normálne rozdelenie s rovnakou disperziou, ale pripúšťame, že stredné hodnoty môžu byť rôzne. Na hladine významnosti* $\alpha = 0.05$ *testujte hypotézu o rovnosti stredných hodnôt týchto rozdelení. Platí* $t_{39}(0,975) = 2.02$.

Príklad 97. *Nech uskutočňované merania zodpovedajú náh. premenným* $Y_i = ax_i + b + \epsilon_i$ *pre* $i = 1, ..., 5$*, kde* $x_i = i$ *a* $\epsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$ *sú nezávislé. Nech realizácie náhodných premenných* Y_i *sú postupne* $2, 1, 3, 5, 4$ *(čísla sú len hypotetické kvôli zjednodušeniu výpočtu). Nájdite regresnú priamku* $\hat{a}x + \hat{b}$*, kde* $\hat{a}$*,* $\hat{b}$ *sú odhady parametrov* a, b *metódou najmenších štvorcov. Na hladine významnosti* $\alpha = 0,05$ *testujte hypotézu, že* $a = 0$ *voči hypotéze, že* $a \neq 0$*. Vieme, že* $t_3(0,975) = 3,18$.

Príklad 98. *Priemerné júnové výšky hladiny mora zaznamenané hydrologickou stanicou v Honolulu v rokoch* $x_1 = 1, ..., x_{15} = 15$*, boli* $y_1, ..., y_{15}$ *metrov nad referenčným bodom. (Konkrétne číselné hodnoty nie je nutné uviesť.) Predpokladáme, že hodnoty* y_i *sú nezávislé realizácie normálneho rozdelenia so strednou hodnotou* $ax_i + b$ *a disperziou* σ^2*, kde* a, b *sú neznáme konštanty. Vieme, že odhad koeficientu* a *metódou najmenších štvorcov je* $0,00627$ *a odhad disperzie odchýlok je* $0,00201$*. Testujte hypotézu* $H_0 : a = 0$ *voči* $H_1 : a \neq 0$ *na hladine významnosti* $0,1$*. Potrebný kvantil je* $t_{13}(0,95) = 1,771$.

Príklad 99. *Meriame rýchlosť pohybujúceho sa objektu v časoch* $t_i = i$ *sekúnd, pre* $i = 1, 2, 3, 4, 5$*. Z fyzikálnej podstaty problému a vlastností meracích zariadení vieme, že nameraná rýchlosť objektu v čase* t *je náhodná premenná s rozdelením* $N(at + b, \sigma^2)$*, kde* a *je zrýchlenie objektu,* b *je jeho počiatočná rýchlosť a* σ^2 *je konštanta charakterizujúca chybovosť meraní. Naviac vieme, že merania sú navzájom nezávislé. Konkrétne namerané hodnoty rýchlosti boli* $v_1 = 99,27$*;* $v_2 = 108,80$*;* $v_3 = 119,39$*;* $v_4 = 128,30$ *a* $v_5 = 139,88$ *m/s. Platí:* $\sum_{i=1}^{5} v_i = 595,64$ *a* $\sum_{i=1}^{5} t_i v_i = 1887,64$*. Nájdite odhad* $\hat{a}$ *zrýchlenia a odhad* $\hat{b}$ *počiatočnej rýchlosti metódou najmenších štvorcov. Testujte hypotézu* $H_0 : a = 9,81$ *voči* $H_1 : a \neq 9,81$ *na hladine významnosti* $\alpha = 0,05$*. Vieme, že* $\frac{1}{3} \sum_{i=1}^{5} (v_i - \hat{a}t_i - \hat{b})^2 = 0,4652$ *a* $t_3(0,975) = 3,18$.

Poznámka: Niektoré príklady z tejto zbierky sú prevzaté z knihy: R. Potocký a kolektív: "Zbierka úloh z pravdepodobnosti a matematickej štatistiky", Alfa, Bratislava, 1986