

Pravdepodobnosť a štatistika INF: otázky na skúšku

3. decembra 2019

1. Uveďte definíciu pravdepodobnostnej miery P na σ -algebre $(\Omega, \mathcal{S})$. Napíšte jeden príklad pravdepodobnostného priestoru $(\Omega, \mathcal{S}, P)$.
2. Uveďte základné vlastnosti pravdepodobnosti. Z definície pravdepodobnostnej miery ukážte, že pre udalosti A, B platí: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
3. Formulujte vetu o pravdepodobnosti zjednotenia n udalostí (princíp inklúzie-exklúzie).
4. Definujte podmienenú pravdepodobnosť udalostí. Formulujte a dokážte vetu o úplnej pravdepodobnosti a Bayesovu vetu (t.j. Bayesov vzorec).
5. Uveďte definíciu nezávislosti dvojice udalostí. Formulujte definíciu združenej nezávislosti n -tice udalostí pre $n \geq 2$.
6. Nech $A_1, \dots, A_n$ sú združene nezávislé udalosti s pravdepodobnosťou nastania p . Nech A je udalosť, že nastane práve k spomedzi udalostí $A_1, \dots, A_n$. Vyjadrite $P(A)$ pomocou n, k, p (binomická formula).
7. Uveďte definíciu a základné vlastnosti distribučnej funkcie F náhodnej premennej.
8. Uveďte definíciu a jeden príklad diskkrétnej náhodnej premennej. Uveďte predpis distribučnej funkcie náhodnej premennej X , ktorá nadobúda hodnoty $x_1, \dots, x_n$ s pravdepodobnosťami $p_1, \dots, p_n$.
9. Definujte strednú hodnotu diskkrétnej náhodnej premennej. Sformulujte vetu o linearite strednej hodnoty pre diskkrétne náhodné premenné. Nech g je spojitá funkcia, X je diskrétna náhodná premenná. Ako je možné vypočítať $E(g(X))$?
10. Uveďte definíciu a základné vlastnosti disperzie diskkrétnej náhodnej premennej. Ako je možné vypočítať disperziu náhodnej premennej X , ktorá nadobúda hodnoty $x_1, \dots, x_n$ s pravdepodobnosťami $p_1, \dots, p_n$?
11. Nech X má binomické rozdelenie s parametrami n a p . Uveďte predpis pre $P[X = k]$, kde $k \in \{0, \dots, n\}$. Uveďte vyjadrenie pre strednú hodnotu a disperziu X pomocou n a p . Aká je interpretácia binomického rozdelenia?
12. Nech X má Poissonovo rozdelenie s parametrom $\lambda > 0$. Uveďte predpis pre $P[X = k]$, kde $k \in \mathbb{N}_0$. Uveďte vyjadrenie pre strednú hodnotu a disperziu X pomocou λ .
13. Nech X má geometrické rozdelenie s parametrom p . Uveďte predpis pre $P[X = k]$, kde $k \in \{0, \dots, n\}$. Uveďte vyjadrenie pre strednú hodnotu pomocou p . Aká je interpretácia geometrického rozdelenia?
14. Uveďte definíciu spojitaj náhodnej premennej. Nech X je spojitá náhodná premenná s hustotou f . Vyjadrite pomocou f hodnotu $P[a < X < b]$, kde $a < b$. Ako určíme hustotu X , ak poznáme (spojite diferencovateľnú) distribučnú funkciu X ?
15. Nech X je spojitá náhodná premenná s distribučnou funkciou F a s hustotou f . Nech $Y = aX + b$, kde $a \neq 0$. Vyjadrite distribučnú funkciu a hustotu Y pomocou a, b, F, f .

16. Definujte strednú hodnotu spojitej náhodnej premennej. Sformulujte vetu o linearite strednej hodnoty pre spojité náhodné premenné. Nech X je spojitá náhodná premenná s hustotou f a nech g je spojitá funkcia taká, že $g(X)$ je spojitá náhodná premenná s konečnou strednou hodnotou. Ako je možné vypočítať $E(g(X))$ pomocou funkcií f, g ?
17. Uveďte definíciu a základné vlastnosti disperzie spojitej náhodnej premennej. Ako je možné vypočítať disperziu X , ktorá má hustotu $f(x)$ pre $x \in (a, b)$ a $f(x) = 0$ pre $x \notin (a, b)$?
18. Nech X má rovnomerné rozdelenie na intervale (a, b) . Uveďte predpis pre hustotu a distribučnú funkciu X . Uveďte vyjadrenie pre strednú hodnotu a disperziu X pomocou hodnôt a, b .
19. Nech X má exponenciálne rozdelenie s parametrom $\lambda > 0$. Uveďte predpis pre hustotu a distribučnú funkciu X . Uveďte vyjadrenie pre strednú hodnotu a disperziu X pomocou λ . Uveďte príklad použitia exponenciálneho rozdelenia.
20. Nech X má normálne rozdelenie s parametrami μ a $\sigma^2 > 0$. Uveďte predpis pre hustotu, strednú hodnotu a disperziu X . Načrtnite graf hustoty a distribučnej funkcie náhodnej premennej s normalizovaným normálnym rozdelením. Aké je rozdelenie $Y = aX + b$, kde $a \neq 0$?
21. Formulujte centrálnu limitnú vetu a integrálnu Moivreovu-Laplaceovu vetu. Aký je vzťah medzi týmito tvrdeniami?
22. Uveďte definíciu náhodného vektora a jeho distribučnej funkcie. Skonstruujte príklad funkcie z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$, ktorá je distribučnou funkciou nejakého náhodného vektora.
23. Uveďte definíciu nezávislosti n -tice náhodných premenných. Nech náhodné premenné X, Y sú nezávislé s konečnou strednou hodnotou a disperziou. Ako je možné vyjadriť $E(XY)$ pomocou $E(X)$ a $E(Y)$? Ako je možné vyjadriť $D(X + Y)$ pomocou $D(X)$ a $D(Y)$?
24. Definujte kovarianciu náhodných premenných a uveďte jej základné vlastnosti.
25. Definujte korelačný koeficient náhodných premenných a uveďte jeho základné vlastnosti.
26. Uveďte definíciu a interpretáciu multinomického rozdelenia. Uveďte vyjadrenie pre strednú hodnotu a kovariančnú maticu vektora X s multinomickým rozdelením.
27. Definujte strednú hodnotu spojitého náhodného vektora. Napíšte vyjadrenie pre $E(g(X))$ pomocou spojitej funkcie g a hustoty f vektora X .
28. Nech m -rozmerný náhodný vektor X má regulárne viacrozmerné normálne rozdelenie $N_m(\mu, \Sigma)$. Akú má X hustotu, strednú hodnotu a kovariančnú maticu? Aké rozdelenie majú zložky vektora X ? Aké rozdelenie má vektor $AX + b$, kde $b \in \mathbb{R}^k$ a A je matica typu $k \times m$?