1. Nech $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výber z $N_p(\mu, \Sigma)$. Nájdite odhad parametrov μ a Σ metódou maximálnej vierohodnosti.

Logaritmus funkcie vierohodnosti má tvar:

$$l(x, \mu, \Sigma) = -\frac{n}{2} \log \det(2\pi\Sigma) - \frac{n}{2} \mathrm{tr}(\Sigma^{-1}S) - \frac{n}{2}(\bar{x} - \mu)^T \Sigma^{-1}(\bar{x} - \mu)$$

Od μ závisí len posledný sčítanec a platí $(\bar{x}-\mu)^T\Sigma^{-1}(\bar{x}-\mu) \geq 0$. Maximum sa teda dosahuje vtedy, keď $(\bar{x} - \mu)^T\Sigma^{-1}(\bar{x} - \mu) = 0$, a teda $\hat{\mu} = x$.

Ďalej teda platí

$$l(x, \bar{x}, \Sigma) = -\frac{n}{2} \log \det(2\pi\Sigma) - \frac{n}{2} \mathrm{tr}(\Sigma^{-1}S) = -\frac{np}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log \det(\Sigma) - \frac{n}{2} \mathrm{tr}(\Sigma^{-1}S)$$

Na to, aby sme našli odhad kovariančnej matice, potrebujeme minimalizovať výraz $\log \det(\Sigma) + \mathrm{tr}(\Sigma^{-1}S)$

$$\log \det(\Sigma) + \mathrm{tr}(\Sigma^{-1}S) =$$
$$= \log \det(\Sigma S^{-1} S) + \mathrm{tr}(\Sigma^{-1}S) = \log \det(\Sigma S^{-1}) + \log \det(S) + \mathrm{tr}(\Sigma^{-1}S) =$$
$$= \log \det(\Sigma S^{-1/2} S^{-1/2}) + \log \det(S) + \mathrm{tr}(\Sigma^{-1} S^{1/2} S^{1/2}) =$$
$$= \log \det(S^{-1/2}\Sigma S^{-1/2}) + \log \det(S) + \mathrm{tr}(S^{1/2}\Sigma^{-1}S^{1/2}) =$$
$$= \log \prod_{i=1}^{p} \lambda_i + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\lambda_i} + \log \det(S) = \sum_{i=1}^{p} (\log \lambda_i + \frac{1}{\lambda_i}) + \log \det(S),$$

kde $\lambda_i,\ i = 1, \ldots, p$ sú vlastné hodnoty matice $S^{-1/2}\Sigma S^{-1/2}$.
Aby sa dosahovalo minimum, musí byť $\lambda_i = 1\ \forall i$, a teda musí platiť $S^{-1/2}\Sigma S^{-1/2} = I_p$. To ale nastáva vtedy, keď $\Sigma = S$, a teda $\hat{\Sigma} = S$.

2. Nech $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výber z $N_p(\mu, \Sigma)$. Predpokladajme, že $\mu = \mu_0$. Nájdite odhad parametra Σ metódou maximálnej vierohodnosti.

Logaritmus funkcie vierohodnosti má v tomto prípade tvar:

$$l(x, \Sigma) = -\frac{n}{2} \log \det(2\pi\Sigma) - \frac{n}{2} \mathrm{tr}(\Sigma^{-1}S) - \frac{n}{2}(\bar{x} - \mu_0)^T \Sigma^{-1}(\bar{x} - \mu_0)$$

Ak označíme $d = \bar{x} - \mu_0$, potom

$$l(x, \Sigma) = -\frac{n}{2} \log \det(2\pi\Sigma) - \frac{n}{2} \mathrm{tr}(\Sigma^{-1}S) - \frac{n}{2} d^T \Sigma^{-1} d =$$
$$= -\frac{np}{2} \log(2\pi) - -\frac{n}{2} \log \det(\Sigma) - \frac{n}{2} \mathrm{tr}(\Sigma^{-1}S) - \frac{n}{2} d^T \Sigma^{-1} d$$

Potrebujeme teda minimalizovať výraz $\log \det(\Sigma) + \mathrm{tr}(\Sigma^{-1}S) + d^T\Sigma^{-1}d$. Úpravami dostávame

$$\log \det(\Sigma) + \mathrm{tr}(\Sigma^{-1}S) + d^T\Sigma^{-1}d =$$
$$= \log \det(\Sigma) + \mathrm{tr}(\Sigma^{-1}S) + \mathrm{tr}(d^T\Sigma^{-1}d) =$$
$$= \log \det(\Sigma) + \mathrm{tr}(\Sigma^{-1}S) + \mathrm{tr}(\Sigma^{-1}dd^T) =$$
$$= \log \det(\Sigma) + \mathrm{tr}(\Sigma^{-1}(S + dd^T))$$

Podobne ako v predchádzajúcom príklade teda platí $\hat{\Sigma} = S + dd^T$.