

Viacrozmerné štatistické analýzy: otázky na skúšku

15. decembra 2020

1. Uveďte definíciu náhodného vektora a jeho distribučnej funkcie. Skonstruujte príklad funkcie z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$, ktorá je distribučnou funkciou nejakého náhodného vektora. Definujte kovariančnú maticu náhodného vektora a uveďte jej základné vlastnosti. Definujte kovarianciu dvoch náhodných vektorov.
2. Nech $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ sú náhodné vektory a nech existuje $E(\mathbf{X}_1)$. Zdefinujte podmienenú strednú hodnotu a podmienenú varianciu náhodného vektora $\mathbf{X}_1$ za podmienky, že $\mathbf{X}_2 = \mathbf{x}_2$. Nech $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ sú náhodné vektory a nech existuje $E(\mathbf{X}_1)$. Popíšte aproximáciu $\mathbf{X}_1$ funkciou $\mathbf{X}_2$ pomocou podmienenej strednej hodnoty $E(\mathbf{X}_1|\mathbf{X}_2)$.
3. Uvažujme náhodné premenné X, Y s distribučnými funkciami F, G a združenou distribučnou funkciou H . Definujte kopulu týchto náhodných premenných a popíšte vzťah medzi kopulou C a distribučnými funkciami F, G, H .
4. Nech C je n -rozmerná kopula. Popíšte jej ohraničenia (dolné a horné) a stručne popíšte ich odvodenie pre $n = 2$.
5. Nech p -rozmerný náhodný vektor $\mathbf{X}$ má regulárne viacrozmerné normálne rozdelenie $N_p(\mu, \Sigma)$. Akú má $\mathbf{X}$ hustotu, strednú hodnotu a kovariančnú maticu? Aké rozdelenie majú zložky vektora $\mathbf{X}$? Aké rozdelenie má vektor $A\mathbf{X} + b$, kde $b \in \mathbb{R}^k$ a A je matica typu $k \times p$?
6. Nech $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ je náhodný výber z p -rozmerného rozdelenia so strednou hodnotou μ a kovariančnou maticou Σ . Definujte základné výberové charakteristiky a uveďte ich strednú hodnotu.
7. Nech $\mathbf{X} \sim N_p(0, \Sigma)$, A je matica typu $p \times p$ a $A\Sigma$ je idempotentná. Uveďte, aké rozdelenie má kvadratická forma $\mathbf{X}'A\mathbf{X}$ a vypočítajte jej strednú hodnotu.
8. Definujte Wishartovo rozdelenie. Ukážte, že ak $\mathbf{M} \sim W_p(\Sigma, n)$, potom $E(\mathbf{M}) = n\Sigma$.
9. Definujte Hotellingovo rozdelenie a popíšte jeho súvis s Fischerovým rozdelením.
10. Nech $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ je náhodný výber z $N_p(0, \Sigma)$. Definujte výberovú kovariančnú maticu a uveďte jej rozdelenie. Nech $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ je náhodný výber z $N_p(\mu, \Sigma)$ a $\mathbf{Y}_i = A\mathbf{X}_i$, $i = 1, \dots, n$. Vyjadrite výberový priemer a výberovú kovariančnú maticu $\mathbf{Y}$ pomocou výberového priemeru a výberovej kovariančnej matice $\mathbf{X}$.
11. Zdefinujte Fisherovu informačnú maticu a uveďte dolné ohraničenie pre varianciu odhadu $\hat{\theta} = t(\mathbf{X})$ parametra θ .

12. Nech $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^T$ je náhodný výber z rozdelenia závislého od parametra $\theta \in \mathbf{R}^k$. Zadefinujte test pomerom vierohodnosti pre $H_0 : \theta \in \Theta_0$ oproti $H_1 : \theta \in \Theta_1$ na hladine významnosti α . Uveďte tvar critickej oblasti pre tento prípad, tvar testovacej štatistiky a jej asymptotické rozdelenie.
13. Uvažujme dva nezávislé náhodné výbery $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_{n_1}$ z $N_p(\mu_1, \Sigma)$ a $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_{n_2}$ z $N_p(\mu_2, \Sigma)$. Uveďte test pomerom vierohodnosti pre hypotézu $H_0 : \mu_1 = \mu_2$.
14. Uvažujme dva náhodné výbery $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ z $N_p(\mu_1, \Sigma)$ a $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_n$ z $N_p(\mu_2, \Sigma)$, medzi ktorými existuje prirodzené párovanie. Odvoďte test pomerom vierohodnosti pre hypotézu $H_0 : \mu_1 = \mu_2$.
15. Uvažujme lineárny regresný model tvaru
$$\begin{matrix} \mathbf{Y} & = & \mathbf{X} & \mathbf{B} & + & \varepsilon \\ n \times p & & n \times q & q \times p & & n \times p \end{matrix}.$$
 Popíšte spôsob testovania lineárnej hypotézy o neznámych parametroch $H_0 : LB = 0$, kde L je matica typu $r \times q$.
16. Uveďte najčastejšie používané testovacie štatistiky pre testy hypotéz vo viacrozmernom regresnom modeli.
17. Nech Y_{ij} je j -te pozorovanie, $j = 1, \dots, n_i$ v i -tom základnom súbore $N(\mu_i, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, I$. Testujeme hypotézu $H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_I (= \mu)$. Zostavte zodpovedajúci model jednofaktorovej analýzy rozptylu pre tento prípad a uveďte postup testovania hypotéz.
18. Nech $Y_{ijk} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2)$ je k -te pozorovanie, $k = 1, \dots, K$ na i -tej úrovni faktora A a j -tej úrovni faktora B. Zostavte zodpovedajúci model dvojfaktorovej analýzy rozptylu pre tento prípad a uveďte postup testovania hypotéz.
19. Nech $\mathbf{Y}_{ij}$ je j -te pozorovanie, $j = 1, \dots, n_i$ v i -tom základnom súbore $N_p(\mu_i, \Sigma)$, $i = 1, \dots, I$. Testujeme hypotézu $H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_I (= \mu)$. Zostavte zodpovedajúci model viacrozmernej jednofaktorovej analýzy rozptylu pre tento prípad a uveďte postup testovania hypotéz.
20. Nech $\mathbf{Y}_{ijk}$ je k -te p -rozmerné pozorovanie, $k = 1, \dots, K$ na i -tej úrovni faktora A a j -tej úrovni faktora B, $i = 1, \dots, I$, $j = 1, \dots, J$. Testujeme hypotézu $H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_I (= \mu)$. Zostavte zodpovedajúci model viacrozmernej dvojfaktorovej analýzy rozptylu pre tento prípad a uveďte postup testovania hypotéz.
21. Uvažujme situáciu, keď dvom skupinám subjektov podáme p ošetrení. Popíšte hypotézy profilovej analýzy, ktoré by sme v tomto prípade mohli testovať (predpokladajte, že nezamietneme hypotézu o rovnobežnosti profilov).
22. Zostavte model pre situáciu, v ktorej máme súčasne kvalitatívne aj kvantitatívne premenné a popíšte postup testovania hypotéz v tomto prípade.