Pravdepodobnosť a štatistika 2014/15
(otázky na skúšku)

Radoslav Harman, KAMŠ, FMFI UK

11. decembra 2014

1. Uveďte všeobecnú definíciu σ-algebry $(\Omega, \mathcal{S})$. Z definície σ-algebry $(\Omega, \mathcal{S})$ dokážte, že ak $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$, potom $\cap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$, t.j. dokážte uzavretosť σ-algebry vzhľadom ku spočítateľným prienikom. Uveďte dva príklady systému množín $\mathcal{S}$ tak, aby $(\{a, b, c\}, \mathcal{S})$ bola σ-algebra.

2. Uveďte definíciu σ-algebry generovanej systémom $\mathfrak{F}$ podmnožín množiny Ω. Uveďte tiež definíciu σ-algebry borelovských podmnožín množiny $\mathbb{R}^m$. Zdôvodnite, prečo je interval $I \subseteq \mathbb{R}$ akéhokoľvek typu (otvorený, polouzavretý, uzavretý) borelovská množina.

3. Uveďte definíciu pravdepodobnostnej miery P na σ-algebre $(\Omega, \mathcal{S})$. Napíšte jeden príklad pravdepodobnostného priestoru $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, v ktorom exaktne popíšete matematické objekty Ω, $\mathcal{S}$ a P.

4. Z definície pravdepodobnostnej miery dokážte nasledovné tvrdenia: Nech A,B sú udalosti pravdepodobnostného priestoru $(\Omega, \mathcal{S}, P)$. Ak A, B sú disjunktné, tak $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Ak $A \subseteq B$, tak $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ a $P(A) \leq P(B)$. Ak A, B, C sú udalosti pravdepodobnostného priestoru $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, tak $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

5. Formulujte vetu o pravdepodobnosti zjednotenia n udalostí (princíp inklúzie-exklúzie). Zdôvodnite nasledovné tvrdenie: Ak postupnosť čísiel $(1, 2, \dots, n)$ dokonale náhodne premiešame, potom pravdepodobnosť, že aspoň jedno z čísiel $1, 2, \dots, n$ bude po premiešaní na svojom pôvodnom mieste, je $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$.

6. Definujte podmienenú pravdepodobnosť udalostí. Formulujte a dokážte vetu o úplnej pravdepodobnosti a Bayesovu vetu (t.j. Bayesov vzorec).

7. Uveďte definíciu nezávislosti dvojice udalostí. Formulujte definíciu združenej nezávislosti n-tice udalostí pre $n \geq 2$. Popíšte nejaký pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, na ktorom identifikujete tri rôzne združene nezávislé udalosti $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{S}$ a tiež tri rôzne udalosti B_1, B_2, B_3, ktoré sú nezávislé po dvoch, ale združene (ako trojica) nie sú nezávislé.

8. Nech $A_1, A_2, \dots, A_n$ sú združene nezávislé udalosti, pričom každá má pravdepodobnosť p. Nech A je udalosť, že nastane práve k spomedzi udalostí $A_1, A_2, \dots, A_n$, kde $k \in \{0, \dots, n\}$. Napíšte vyjadrenie hodnoty $P(A)$ pomocou n, k a p (binomická formula). Svoje tvrdenie podrobne zdôvodnite!

9. Uveďte definíciu a základné vlastnosti distribučnej funkcie F náhodnej premennej. Dokážte dve z uvedených vlastností. Načrtnite distribučnú funkciu náhodnej premennej X, pre ktorú platí: $P[X = 0] = 1/4$, $P[X = 1] = 1/2$, $P[X = 2] = 1/4$.

10. Uveďte formálnu definíciu a jeden (zmysluplný) príklad diskrétnej náhodnej premennej. Zdôvodnite tvrdenie: Ak je X diskrétna náhodná premenná, tak je aj $g(X)$ diskrétna náhodná premenná (pre akúkoľvek funkciu $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.) Aký je všeobecný predpis distribučnej funkcie náhodnej premennej X, ktorá nadobúda $x_1, ..., x_n$ s pravdepodobnosťami $p_1, ..., p_n$?

11. Definujte strednú hodnotu diskrétnej náhodnej premennej. Uveďte jeden príklad diskrétnej náhodnej premennej s konečným oborom hodnôt a určte jej strednú hodnotu. Napíšte vetu o linearite strednej hodnoty pre diskrétne náhodné premenné. Nech diskrétna náhodná premenná X nadobúda $x_1, ..., x_n$ s pravdepodobnosťami $p_1, ..., p_n$. Nech g je spojitá funkcia a nech existuje konečná $E(g(X))$. Ako je možné vypočítať $E(g(X))$ pomocou hodnôt $g(x_i)$ a p_i?

12. Uveďte definíciu disperzie diskrétnej náhodnej premennej. Uveďte jeden príklad diskrétnej náhodnej premennej s konečným oborom hodnôt a určte jej disperziu. Dokážte tvrdenie: Ak a, b sú reálne čísla a X je diskrétna náhodná premenná, tak $D(aX+b) = a^2D(X)$. Ako je možné vypočítať disperziu náhodnej premennej X, ktorá nadobúda hodnoty $x_1, ..., x_n$ s pravdepodobnosťami $p_1, ..., p_n$?

13. Uveďte a dokážte Markovovu aj Čebyševovu nerovnosť pre diskrétne náhodné premenné.

14. Nech X má binomické rozdelenie s parametrami n a p (teda $X \sim Bin(n, p)$). Uveďte predpis pre $P[X = k]$, kde $k \in \{0, ..., n\}$. Uveďte vyjadrenie pre EX a DX pomocou n a p. Vzťah pre EX dokážte. Aká je interpretácia binomického rozdelenia?

15. Majme postupnosť náhodných premenných $X_{n_1}, X_{n_1+1}, \ldots$ pričom $X_n \sim Bin(n, \lambda/n)$ pre všetky $n \geq n_1$, pričom $0 < \lambda \leq n_1$. Nech $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Pomocou k a λ vyjadrite $\lim_{n\to\infty} P[X_n = k]$. Svoje tvrdenie dokážte!

16. Nech X má Poissonovo rozdelenie s parametrom $\lambda > 0$ (teda $X \sim Po(\lambda)$). Uveďte predpis pre $P[X = k]$, kde $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ako závisí EX a DX od λ? Vzťah pre EX dokážte. V akých situáciách sa môžeme stretnúť s Poissonovým rozdelením?

17. Nech X má geometrické rozdelenie s parametrom p (teda $X \sim Geo(p)$). Uveďte predpis pre $P[X = k]$, kde $k \in \{0, ..., n\}$. Uveďte vyjadrenie pre EX pomocou p a naznačte techniku dôkazu. V akých situáciách sa môžeme stretnúť s geometrickým rozdelením?

18. Nech X má hypergeometrické rozdelenie s parametrami M, N a n ($X \sim Hyp(M, N, n)$). Uveďte predpis pre $P[X = k]$, kde $k \in \{\max(0, n + N - M), \ldots, \min(n, N)\}$. Aká je interpretácia hypergeometrického rozdelenia? Uveďte vyjadrenie pre EX pomocou M, N, n.

19. Uveďte definíciu spojitej náhodnej premennej. Nech X spojitá náhodná premenná s hustotou f. Vyjadrite pomocou f hodnotu $P[a < X < b]$, kde $a < b$. Ako určíme hustotu premennej X, ak poznáme (spojite diferencovateľnú) distribučnú funkciu premennej X? Musí byť hustota spojitej náhodnej premennej spojitá (ako funkcia z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$)? Musí byť distribučná funkcia spojitej náhodnej premennej spojitá?

20. Nech X je spojitá náhodná premenná s distribučnou funkciou F_X a hustotou f_X. Nech $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ a nech $Y = aX + b$. Vyjadrite distribučnú funkciu a hustotu premennej Y pomocou konštánt a, b a F_X, resp. f_X. Toto vyjadrenie dokážte.

21. Definujte strednú hodnotu spojitej náhodnej premennej. Uveďte príklad spojitej náhodnej premennej s konečnou strednou hodnotou. Napíšte vetu o linearite strednej hodnoty pre spojité náhodné premenné. Nech X je spojitá náhodná premenná s hustotou f a nech $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkcia taká, že $g(X)$ je spojitá náhodná premenná s konečnou strednou hodnotou. Ako je možné vypočítať $E(g(X))$ pomocou funkcií f a g?

22. Uveďte definíciu disperzie spojitej náhodnej premennej. Uveďte príklad spojitej náhodnej premennej s konečnou disperziou. Zdôvodnite, prečo pre náhodnú premennú X s konečnou disperziou a pre akékoľvek reálne číslo a platí $D(aX) = a^2 D(X)$. Ako je možné pomocou integrovania vypočítať disperziu spojitej náhodnej premennej X, ktorá má hustotu $f(x)$ pre $x \in (a, b)$ a $f(x) = 0$ pre $x \notin (a, b)$?

23. Uveďte a dokážte Markovovu aj Čebyševovu nerovnosť pre spojité náhodné premenné.

24. Nech X má rovnomerné rozdelenie na intervale (a, b) (teda $X \sim R(a, b)$). Uveďte predpis pre hustotu a distribučnú funkciu náhodnej premennej X. Uveďte vyjadrenie pre EX a DX pomocou hodnôt a, b. Vzťah pre EX dokážte. V akých situáciách sa môžeme stretnúť s rovnomerným rozdelením?

25. Nech X má exponenciálne rozdelenie s parametrom $\lambda > 0$ (teda $X \sim Exp(\lambda)$). Uveďte predpis pre hustotu a distribučnú funkciu náhodnej premennej X. Uveďte vyjadrenie pre EX a DX pomocou λ. Vzťah pre EX dokážte. V akých situáciách sa môžeme stretnúť s exponenciálnym rozdelením?

26. Nech náhodná premenná X má normálne rozdelenie s parametrami μ a $\sigma^2 > 0$. Uveďte predpis pre hustotu náhodnej premennej X, predpis pre EX a DX. Načrtnite graf hustoty a graf distribučnej funkcie Φ náhodnej premennej s normalizovaným normálnym rozdelením. Aké je rozdelenie náhodnej premennej $Y = aX + b$, kde a, b sú reálne čísla, $a \neq 0$?

27. Formulujte centrálnu limitnú vetu a integrálnu Moivreovu-Laplaceovu vetu (t.j. vetu, ktorá zdôvodňuje možnosť asymptotickej aproximácie binomického rozdelenia normálnym rozdelením). Aký je vzťah medzi týmito tvrdeniami?

28. Uveďte definíciu náhodného vektora a jeho distribučnej funkcie. Nech F je distribučná funkcia náhodného vektora $\mathbf{X} = (X, Y)^T$ a nech $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, pričom $a < b$ a $c < d$. Vyjadrite $P[a \leq X < b, c \leq Y < d]$ pomocou hodnôt $F(a, c)$, $F(a, d)$, $F(b, c)$ a $F(b, d)$. Toto vyjadrenie zdôvodnite. Skonštruujte príklad funkcie z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$, ktorá je distribučnou funkciou nejakého náhodného vektora $(X, Y)^T$.

29. Uveďte definíciu nezávislosti n-tice náhodných premenných. Nech náhodné premenné X_1, X_2 sú nezávislé s konečnou strednou hodnotou a disperziou. a) Ako je možné vyjadriť $E(X_1 X_2)$ pomocou $E(X_1)$ a $E(X_2)$? b) Ako je možné vyjadriť $D(X_1 + X_2)$ pomocou $D(X_1)$ a $D(X_2)$? Dokážte vzorec b) pomocou vzorca a).

30. Formulujte a pomocou Čebyševovej nerovnosti dokážte (slabý) zákon veľkých čísiel.

31. Definujte diskrétny náhodný vektor a jeho strednú hodnotu. Uveďte príklad diskrétneho náhodného vektora s konečným oborom hodnôt a určte jeho strednú hodnotu. Napíšte znenie vety o linearite strednej hodnoty diskrétneho náhodného vektora. Napíšte znenie vety o strednej hodnote funkcie diskrétneho náhodného vektora.

32. Definujte kovarianciu náhodných premenných. Uveďte základné vlastnosti kovariancie. Nech $\mathbf{X} = (X, Y)^T$ je náhodný vektor, ktorý nadobúda hodnoty $(x_i, y_i)^T$ s pravdepodobnosťami p_i, kde $i = 1, ..., n$. Ako môžeme vypočítať $\text{cov}(X, Y)$ pomocou hodnôt $(x_i, y_i)^T$ a p_i?

33. Definujte kovariančnú maticu náhodného vektora a uveďte jej základné vlastnosti. Majme diskrétny náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_m)^T$ s konečnou kovariančnou maticou $\text{Cov}(\mathbf{X})$. Nech A je matica typu $k \times m$ a nech $b \in \mathbb{R}^k$. Ako je možné vyjadriť kovariančnú maticu náhodného vektora $\mathbf{Y} = A\mathbf{X} + b$ pomocou A a $\text{Cov}(\mathbf{X})$? Ako je možné zapísať prvky kovariančnej matice náhodného vektora $(X, Y)^T$ pomocou $D(X), D(Y)$ a korelačného koeficientu premenných X a Y?

34. Definujte korelačný koeficient náhodných premenných. Uveďte základné vlastnosti korelačného koeficientu. Nech $\mathbf{X} = (X, Y)^T$ je náhodný vektor, ktorý nadobúda hodnoty $(x_i, y_i)^T$ s pravdepodobnosťami p_i, kde $i = 1, ..., n$. Ako môžeme vypočítať $\rho(X, Y)$ pomocou hodnôt x_i, y_i, p_i?

35. Uveďte definíciu a interpretáciu multinomického rozdelenia. Ak $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_m)^T \sim Mult(n, p_1, \ldots, p_m)$, aká je stredná hodnota a kovariančná matica vektora $\mathbf{X}$? Aké rozdelenie má náhodná premenná X_1?

36. Uveďte definíciu spojitého náhodného vektora. Nech $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_m)^T$ je spojitý náhodný vektor s hustotou $f_{\mathbf{X}}$. Nech $m = 2$. Pomocou $f_{\mathbf{X}}$ vyjadrite pravdepodobnosť, že $\mathbf{X}$ padne do obdĺžnika $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$. Pomocou $f_{\mathbf{X}}$ tiež vyjadrite hustotu náhodnej premennej X_1. Uveďte príklad spojitého náhodného vektora a uveďte jeho hustotu.

37. Definujte strednú hodnotu spojitého náhodného vektora. Uveďte príklad spojitého náhodného vektora a uveďte jeho strednú hodnotu. Napíšte vetu o linearite strednej hodnoty. Napíšte vyjadrenie pre $E(g(\mathbf{X}))$, pomocou spojitej funkcie g a hustoty f spojitého náhodného vektora $g(\mathbf{X})$.

38. Nech m-rozmerný náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_m)^T$ má (regulárne) mnohorozmerné normálne rozdelenie $N_m(\mu, \Sigma)$. Akú má $\mathbf{X}$ hustotu, strednú hodnotu a kovariančnú maticu? Aké rozdelenie má náhodná premenná X_1? Nech $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$ a A je matica typu $k \times m$, $k \leq m$ a hodnosti k. Aké rozdelenie má náhodný vektor $A\mathbf{X} + \mathbf{b}$?

39. Uveďte definíciu kvantilovej funkcie prislúchajúcej danej distribučnej funkcii F. Popíšte metódu inverznej transformácie na generovanie realizácií s danou distribučnou funkciou. Ako je možné zvoliť funkciu $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, aby pre $U \sim R(0, 1)$ platilo $g(U) \sim Exp(\lambda)$?

40. Stručne popíšte algoritmus, ako pomocou generátora z rozdelenia $R(0, 1)$ vygenerujeme realizáciu diskrétnej náhodnej premennej, ktorá nadobúda len konečný počet bodov s nenulovou pravdepodobnosťou. Uveďte tiež metódu, ako generovať realizácie náhodnej premennej s geometrickým rozdelením.

41. Popíšte zamietaciu metódu generovania realizácií spojitých náhodných premenných. Popíšte ako použiť túto metódu na generovanie realizácií z normálneho rozdelenia (ak máme k dispozícii generátor nezávislých realizácií z rozdelenia $R(0, 1)$.)

42. Popíšte metódu ako vygenerovať realizáciu z mnohorozmerného normálneho rozdelenia so zadanou strednou hodnotou a kovariančnou maticou. (Predpokladáme, že pre zadanú pozitívne semidefinitnú maticu Σ vieme nájsť maticu $\mathbf{C}$ tak, aby platilo $\Sigma = \mathbf{C}\mathbf{C}^T$.)

43. Popíšte metódu ako generovať realizácie rovnomerného rozdelenia vo vnútri a na povrchu jednotkovej gule v $\mathbb{R}^m$. (Predpokladáme, že máme k dispozícii generátory nezávislých realizácií z rozdelení $R(0,1)$ aj $N(0,1)$.) Pre $m = 2$ uveďte dve odlišné metódy.

44. Definujte rozdelenia χ^2_k a t_k tak, že popíšete konštrukciu náhodných premenných s rozdelením χ^2_k, resp. t_k pomocou nezávislých náhodných premenných s rozdelením $N(0,1)$ (nie je potrebné vedieť hustotu náhodných premenných s rozdelením χ^2_k a t_k). Dokážte, že ak $Z \sim \chi^2_k$, tak platí $E(Z) = k$.

45. Uveďte definíciu týchto pojmov: náhodný výber, výberový priemer, výberový rozptyl. Nech $Y_1, ...Y_m$ tvoria náhodný výber z $N(\mu, \sigma^2)$, pričom $m \geq 2$. Nech $\bar{Y}$ je výberový priemer a S^2 je výberový rozptyl výberu $Y_1, ..., Y_m$. Uveďte rozdelenie a strednú hodnotu náhodných premenných $\bar{Y}$ a S^2. Aké rozdelenie má náhodná premenná $T = \frac{\bar{Y}-\mu}{S}\sqrt{m}$?

46. Popíšte pojmy: Nulová a alternatívna hypotéza, štatistický test, hladina významnosti testu, chyba prvého druhu, testovacia štatistika a kritická oblasť.

47. Nech $Y_1, ..., Y_m$ je náhodný výber z rozdelenia $N(\mu, \sigma^2)$, kde $m \geq 2$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ a nech $\alpha \in (0,1)$. Pre test hypotézy $H_0 : \mu = \mu_0$ voči $H_1 : \mu \neq \mu_0$ na hladine významnosti α uveďte tvar kritickej oblasti a príslušnú testovaciu štatistiku. Uveďte príklad realistickej situácie, v ktorej je možné tento test použiť.

48. Nech $Y_1, ..., Y_m$ je náhodný výber z rozdelenia $N(\mu, \sigma^2)$, kde $m \geq 2$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ a nech $\alpha \in (0,1)$. Pre test hypotézy $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ voči $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ na hladine významnosti α uveďte tvar kritickej oblasti a príslušnú testovaciu štatistiku. Uveďte príklad realistickej situácie, v ktorej je možné tento test použiť.

49. Nech $Y_{1,1}, ...Y_{1,m_1}, Y_{2,1}, ..., Y_{2,m_2}$ sú združene nezávislé náhodné premenné. Pre $i = 1$ aj pre $i = 2$ nech $Y_{i,1}, ...Y_{i,m_i}$ tvoria náhodný výber z rozdelenia $N(\mu_i, \sigma^2)$, pričom $m_i \geq 2$, $\sigma^2 > 0$. Nech $\alpha \in (0,1)$ a $\Delta_0 \in \mathbb{R}$. Uveďte kritickú oblasť a príslušnú testovaciu štatistiku pre test hypotézy $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ voči $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$ na hladine významnosti α. Uveďte príklad realistickej situácie, v ktorej je možné tento test použiť.

50. Nech $Y_1, ..., Y_m$, $m \geq 3$ je postupnosť nezávislých náhodných premenných, pričom $Y_i \sim N(ax_i + b, \sigma^2)$, kde $x_1, ..., x_m \in \mathbb{R}$ nie sú všetky rovnaké, $a, b \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$ a nech $\alpha \in (0,1)$. Pre test hypotézy $H_0 : a = 0$ voči $H_1 : a \neq 0$ na hladine významnosti α uveďte tvar kritickej oblasti a príslušnú testovaciu štatistiku.