Maticová algebra pre štatistikov (1-PMA-215)

Príklady k cvičeniam

Radoslav Harman, KAMŠ, FMFI UK

22. novembra 2016

Poznámka: Niektoré z nasledovných príkladov sú prevzaté z knihy D.A.Harville: *Matrix Algebra from a Statistician's Perspective*, Springer 2008.

1 Základné definície teórie matíc, blokové matice

Príklad 1. *Overte asociatívnosť násobenia matíc, čiže dokážte, že pre všetky* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times p}$ *a* $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p\times r}$ *platí* $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

Príklad 2. *Ukážte, že pre všetky* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *platí: a)* $(\mathbf{A}+\mathbf{B})(\mathbf{A}-\mathbf{B}) = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$ *vtedy a len vtedy, keď matice* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *komutujú; b) Ak sú matice* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ *symetrické, tak* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *komutujú.*

Príklad 3. *Maticu* $\mathbf{A}$ *typu* $n \times n$ *nazývame úplne symetrickou (angl. completely symmetric), ak* $\mathbf{A} = a\mathbf{I}_n + b\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^T$ *pre nejaké* $a, b \in \mathbb{R}$. *Nahliadnite, že úplne symetrická matica je symetrická a že súčet úplne symetrických matíc je úplne symetrická matica. Dokážte, že súčin úplne symetrických matíc je úplne symetrická matica. Presvedčte sa, že úplne symetrické matice komutujú.*

Príklad 4. *Dokážte, že súčin dvoch horných trojuholníkových matíc* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *je horná trojuholníková matica. Pomocou tohto tvrdenia dokážte, že súčin dolných trojuholníkových matíc* $\mathbf{C}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *je dolná trojuholníková matica.*

Príklad 5. *Nech* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *a nech* $k \in \mathbb{N}$. *Ukážte, že platí*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{n,n} \\ \mathbf{A} & \mathbf{I}_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{0}_{n,n} \\ k\mathbf{A} & \mathbf{I}_n \end{pmatrix}.$$

Príklad 6. *Ako vieme z kurzu lineárnej algebry, matica* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *sa nazýva regulárna, ak existuje matica* $\mathbf{A}^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *nazývaná inverzia matice* $\mathbf{A}$, *pre ktorú platí* $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$. *Nech* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *je regulárna matica a nech* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. *Presvedčte sa, že nasledovné matice sú regulárne a vzájomne inverzné:*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{a} \\ \mathbf{0}_{1,n} & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a} \\ \mathbf{0}_{1,n} & 1 \end{pmatrix}.$$

Príklad 7. *H-maticou nazveme každú maticu tvaru*

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{a}^T & c \\ 0 & \mathbf{I}_n & \mathbf{b} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. *Dokážte, že H-matice tvoria grupu, čiže že súčin dvoch H-matíc je H-matica a ku každej H-matici* $\mathbf{H}$ *existuje H-matica* $\mathbf{H}^{-1}$ *taká, že* $\mathbf{HH}^{-1} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{H} = \mathbf{I}_{n+2}$.

Príklad 8 (zdĺhavejšie)**.** *Nech* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{r\times s}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times p}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{s\times t}$. *Priamo z definície (obyčajného) súčinu matíc a Kroneckerovho súčinu matíc dokážte:* $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD})$.

Príklad 9 (zdĺhavejšie)**.** *Nech* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times r}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r\times s}$. *Priamo z definície (obyčajného) súčinu matíc, Kroneckerovho súčinu matíc a a operátora* vec *dokážte:* $\mathrm{vec}(\mathbf{ABC}) = (\mathbf{C}^T \otimes \mathbf{A})\mathrm{vec}(\mathbf{B})$.

Príklad 10 (komplexnejšia úloha)**.** *Nech* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *aj* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Koľko násobení a sčítaní reálnych čísiel je potrebných, aby sme vypočítali súčin* $\mathbf{AB}$*? Najprv sa nad touto otázkou zamyslite samostatne a potom si vyhľadajte odpoveď pomocou kľúčových slov "Matrix multiplication algorithm". Zamyslite sa tiež nad tým, ako je možné efektívne vypočítať* $\mathbf{A}^k$*, kde* k *je veľké číslo.*

2 Stĺpcový a riadkový priestor matice, hodnosť matice, nezávislosť množiny matíc

Príklad 11. *Nech* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times p}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r\times m}$. *Ukážte, že a) ak* $\mathcal{C}(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{C}(\mathbf{B})$ *tak* $\mathcal{C}(\mathbf{CA}) \subseteq \mathcal{C}(\mathbf{CB})$*; b) ak* $\mathcal{C}(\mathbf{A}) = \mathcal{C}(\mathbf{B})$ *tak* $\mathcal{C}(\mathbf{CA}) = \mathcal{C}(\mathbf{CB})$*;*

Príklad 12. *Nech* $\mathbf{A}$ *je štvorcová matica. a) Dokážte, že* $\mathcal{C}(\mathbf{A}^k) \subseteq \mathcal{C}(\mathbf{A})$ *pre každé prirodzené číslo* k*. b) Dokážte, že ak* $\mathcal{C}(\mathbf{A}^2) = \mathcal{C}(\mathbf{A})$*, potom* $\mathcal{C}(\mathbf{A}^k) = \mathcal{C}(\mathbf{A})$ *pre každé prirodzené číslo* k*.*

Príklad 13. *Nech* $\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{m\times n}$. *Ukážte, že existujú indexy* $1 \le i_1 < \cdots < i_r \le k$ *také, že* $\mathbf{A}_{i_1}, ..., \mathbf{A}_{i_r}$ *tvoria bázu priestoru* $\mathrm{span}(\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k)$*.*

Príklad 14. *Nech*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nájdite (akúkoľvek) bázu priestoru $\mathcal{C}(\mathbf{A})$*. Akú má matica* $\mathbf{A}$ *hodnosť?*

Príklad 15. *Presvedčte sa, že* $\mathrm{rank}(\mathbf{A}_1...\mathbf{A}_k) \le \min\{\mathrm{rank}(\mathbf{A}_1), ..., \mathrm{rank}(\mathbf{A}_k)\}$*. (Predpokladáme, že* $\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k$ *sú matice vhodných rozmerov.)*

Príklad 16. *Nech* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *má hodnosť* r*. Ukážte, že* $\mathbf{A}$ *sa dá napísať ako súčet* r *matíc, ktoré majú všetky hodnosť* 1*. (Návod: Využite "*$\mathbf{BT}$*-rozklad" z prednášky.)*

Príklad 17. *Presvedčte sa, že množina* $\mathcal{U}_n$ *všetkých horných trojuholníkových matíc typu* $n \times n$ *a množina* $\mathcal{L}_n$ *všetkých dolných trojuholníkových matíc typu* $n \times n$ *sú lineárne podpriestory priestoru* $\mathbb{R}^{n\times n}$*. Akú majú tieto priestory dimenziu? Charakterizujte lineárny priestor* $\mathcal{D}_n = \mathcal{U}_n \cap \mathcal{L}_n$*. Akú dimenziu má priestor* $\mathcal{D}_n$*?*

Príklad 18. *Antisymetrickou nazývame každú maticu* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, ktorá spĺňa* $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$*. Zdôvodnite, prečo množina všetkých antisymetrických matíc typu* $n \times n$ *tvorí lineárny podpriestor priestoru* $\mathbb{R}^{n\times n}$*. Akú dimenziu má tento lineárny podpriestor?*

Príklad 19. *Nech* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *sú nezávislé matice. Pre ktoré reálne čísla* k *sú matice* $k\mathbf{A} + \mathbf{B}, \mathbf{A} + k\mathbf{B} + \mathbf{C}, \mathbf{B} + k\mathbf{C}$ *nezávislé? (Môžete použiť vzorec pre determinant matice* 3×3 *a tvrdenie, že homogénny systém troch lineárnych rovníc o troch neznámych má nenulové riešenie práve vtedy, keď je determinant matice tohto systému nulový.)*

Príklad 20 (komplexnejšia úloha). *Riadkovým priestorom matice* $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m)^T \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *nazývame lineárny vektorový podpriestor priestoru* $\mathbb{R}^n$ *generovaný vektormi* $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$. *Pre všetky tvrdenia z prednášky ohľadom stĺpcového priestoru matice sformulujte analogické tvrdenie ohľadom riadkového priestoru matrice.*

3 Stopa matice, geometria priestoru matíc, ortogonálny doplnok, nulový priestor matice

Príklad 21. *Dokážte, že ak sú matice* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *symetrické, tak* $\mathrm{tr}(\mathbf{ABC}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BAC})$. *Ukážte, že rovnosť* $\mathrm{tr}(\mathbf{ABC}) = \mathrm{tr}(\mathbf{BAC})$ *neplatí pre matice* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *ak matice* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *nekomutujú a* $\mathbf{C} = (\mathbf{AB} - \mathbf{BA})^T$.

Príklad 22. *a) Dokážte Pytagorovu vetu pre matice, čiže dokážte, že ak* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *sú navzájom kolmé nenulové matice (t.j. skalárny súčin matíc* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *je* 0*), tak* $\|\mathbf{A}\|^2 + \|\mathbf{B}\|^2 = \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\|^2$. *b) Dokážte rovnobežníkovú vetu pre matice, čiže dokážte, že ak* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *tak* $2\|\mathbf{A}\|^2 + 2\|\mathbf{B}\|^2 = \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\|^2 + \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|^2$. *c) Dokážte polarizačnú rovnosť pre matice, čiže dokážte, že ak* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *tak* $\mathrm{tr}(\mathbf{AB}^T) = \frac{1}{4}(\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\|^2 - \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|^2)$.

Príklad 23. *Pomocou Cauchy-Schwarzovej nerovnosti dokážte trojuholníkovú nerovnosť:* $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\|$ *pre všetky* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, *pričom rovnosť platí len v prípade* $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, *alebo ak* $\mathbf{A} = c\mathbf{B}$ *pre nejaké* $c \in \mathbb{R}$.

Príklad 24. *Dokážte nasledovné tvrdenie: Nech* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *a* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. *Potom* $\|\mathbf{Ab}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{b}\|$. *Pomôcka:* $\|(\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m)^T\mathbf{b}\|^2 = \sum_{i=1}^m (\mathbf{a}_i^T\mathbf{b})^2$ *pre akékoľvek vektory* $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$.

Príklad 25. *Dokážte kosínusovú vetu pre matice, čiže dokážte, že ak* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *sú nenulové matice, tak* $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|^2 = \|\mathbf{A}\|^2 + \|\mathbf{B}\|^2 - 2\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|\cos(\gamma)$, *kde* γ *je uhol medzi* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$.

Príklad 26. *Nech* $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ *sú nenulové* n*-rozmerné vektory. Nájdite uhol medzi maticami* $\mathbf{I}_n, \mathbf{aa}^T$ *a uhol medzi maticami* $\mathbf{aa}^T, \mathbf{bb}^T$.

Príklad 27. *a) Nájdite nejakú ortonormálnu bázu priestoru symetrických matíc typu* 2×2, *ktorá obsahuje maticu* $(1, 0)^T(1, 0)$. *b) Nájdite nejakú ortonormálnu bázu priestoru symetrických matíc typu* 2×2, *ktorá obsahuje maticu* $(1/\sqrt{2})\mathbf{I}_2$.

Príklad 28. *Nech* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. *Ukážte, že ak je* $\mathbf{B}$ *regulárna matica typu* $n\times n$ *(t.j. existuje matica* $\mathbf{B}^{-1}$ *taká, že* $\mathbf{BB}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{I}_n$*) a* $\mathbf{C}$ *je akákoľvek matica typu* $p \times m$, *tak a)* $\mathcal{C}(\mathbf{AB}) = \mathcal{C}(\mathbf{A})$*; b)* $\mathcal{C}(\mathbf{CABB}^T\mathbf{A}^T) = \mathcal{C}(\mathbf{CA})$.

Príklad 29. *Nech* $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{p\times m}$ *a* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. *Ukážte, že a)* $\mathcal{N}(\mathbf{XA}) \supseteq \mathcal{N}(\mathbf{A})$*; b)* $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \supseteq \mathcal{N}((\mathbf{A}^T, \mathbf{B}^T)^T)$*; c)* $\mathcal{N}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \supseteq \mathcal{N}((\mathbf{A}^T, \mathbf{B}^T)^T)$.

Príklad 30 (komplexnejšia úloha). *Preštudujte si nasledovný článok na Wikipedii:* https://en.wikipedia.org/wiki/Rank-nullity_theorem

4 Inverzné, ortogonálne a permutačné matice

Príklad 31. *Nech* $\mathbf{A} = a\mathbf{I}_n + b\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^T$, $a, b \in \mathbb{R}$, *je úplne symetrická matica (pozri príklad 3). Ukážte, že ak* $a \neq 0$, $b \neq -a/n$, *potom inverzia matice* $\mathbf{A}$ *je tiež úplne symetrická matica.*

Príklad 32. *Dokážte tvrdenie: Nech* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *sú regulárne matice a nech* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *a* $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *sú také matice, že* $\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ *je tiež regulárna. Potom je aj matica* $\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{C}$ *regulárna a platí*

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{C})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D}^{-1} + \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}. \tag{1}$$

Rovnosť (1) *sa nazýva Woodburyho formula.*

Príklad 33. *Presvedčte sa, že horná trojuholníková matica je regulárna práve vtedy, keď sú všetky diagonálne prvky nenulové. Na zvolenej hornej trojuholníkovej matici typu* 4×4 *so všetkými diagonálnymi a nad-diagonálnymi prvkami nenulovými demonštrujte, že inverzia regulárnej hornej trojuholníkovej matice je horná trojuholníková matica.*

Príklad 34. *Nech* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *je regulárna matica, nech* $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *a nech* p *je prirodzené číslo. Ukážte, že nasledovné dva výroky sú ekvivalentné: a) Pre každú maticu* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ *má rovnica* $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$ *riešenie* $\mathbf{X} = \mathbf{G}\mathbf{B}$*; b)* $\mathbf{G} = \mathbf{A}^{-1}$.

Príklad 35. *Nech*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pomocou vety o inverzii blokovej matice ukážte, že $\mathbf{A}$ *je regulárna matica a nájdite* $\mathbf{A}^{-1}$.

Príklad 36. *Pre každé* $\theta \in \mathbb{R}$ *definujme maticu*

$$\mathbf{U}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Zdôvodnite algebraicky aj geometricky tvrdenie: $\mathbf{U}(\alpha)\mathbf{U}(\beta) = \mathbf{U}(\alpha + \beta)$ *pre každé* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Príklad 37. *Popíšte množinu všetkých ortogonálnych horných trojuholníkových matíc typu* $m \times m$.

Príklad 38. *Nájdite nejakú ortogonálnu maticu typu* 3×3*, ktorej prvý riadok je* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

Príklad 39. *Nech* $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *sú permutačné matice a nech* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *je regulárna matica. Ukážte, že potom* $\mathbf{P}_1\mathbf{A}\mathbf{P}_2$ *je regulárna matica a platí* $(\mathbf{P}_1\mathbf{A}\mathbf{P}_2)^{-1} = \mathbf{P}_2^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}_1^T$.

Príklad 40. *Koľko obsahuje priestor* $\mathbb{R}^{m\times m}$ *permutačných matíc? Ak je* m *prvočíslo, koľko je permutačných matíc* $\mathbf{P}$ *spĺňajúcich* $\mathbf{P}^m = \mathbf{I}_m$*? *Koľko obsahuje permutačných matíc* $\mathbf{P}$ *spĺňajúcich* $\mathbf{P}^2 = \mathbf{I}_m$*? (Ak hviezdičkovú úlohu neviete vyriešiť pre všeobecné* m*, vyriešte ju aspoň pre* $m = 2, 3, 4$*.)*

5 Zovšeobecnené inverzie

Príklad 41. *Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Presvedčte sa, že množina všetkých zovšeobecnených inverzií matice $\mathbf{A}$ je afinná, čiže ak $\alpha_1, ..., \alpha_k$ sú reálne čísla, ktorých súčet je 1 a $\mathbf{G}_1, ..., \mathbf{G}_k$ sú zovšeobecnené inverzie matice $\mathbf{A}$, tak aj matica $\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{G}_i$ je zovšeobecnená inverzia matice $\mathbf{A}$.*

Príklad 42. *Nech $\mathbf{0} \neq \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = r$ a nech $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{r\times n}$ sú také matice, že $\mathbf{A} = \mathbf{BT}$. Nech $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n\times r}$ je pravá inverzia matice $\mathbf{T}$. Zdôvodnite, prečo je $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$ regulárna matica. Ukážte, že $\mathbf{R}(\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{R}^T$ je zovšeobecnená inverzia matice $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$.*

Príklad 43. *Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times p}$ a nech existuje matica $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ taká, že $\mathbf{AHB} = \mathbf{B}$. Dokážte, že potom $\mathbf{AGB} = \mathbf{B}$ pre akúkoľvek zovšeobecnenú inverziu $\mathbf{G}$ matice $\mathbf{A}$.*

Príklad 44. *Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = r$ a nech*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{A}_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ je regulárna. Pomocou vety z prednášky týkajúcej sa hodnosti Schurovho doplnku dokážte, že $\mathbf{A}_{22} = \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}$. Následne dokážte, že matica

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

je zovšeobecnená inverzia matice $\mathbf{A}$.

Príklad 45. *Nájdite aspoň dve rôzne zovšeobecnené inverzie matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ -1 & 5 & -2 \\ 4 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Príklad 46. *Ukážte, že každá symetrická matica má aspoň jednu symetrickú zovšeobecnenú inverziu. (Návod: Najprv ukážte, že ak $\mathbf{G}$ je zovšeobecnená inverzia symetrickej matice $\mathbf{A}$, tak aj $\mathbf{G}^T$ je zovšeobecnená inverzia matice $\mathbf{A}$.)*

Príklad 47. *Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times q}$, $\mathcal{C}(\mathbf{C}) \subseteq \mathcal{C}(\mathbf{A})$ a $\mathcal{C}(\mathbf{B}^T) \subseteq \mathcal{C}(\mathbf{A}^T)$. Potom matica $\mathbf{BA}^-\mathbf{C}$ nezávisí na voľbe zovšeobecnenej inverzie $\mathbf{A}^-$. Dokážte! Použijúc práve dokázané tvrdenie a tvrdenie $\mathcal{C}(\mathbf{X}^T\mathbf{X}) = \mathcal{C}(\mathbf{X}^T)$ si všimnite, že $\mathbf{X}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})^-\mathbf{X}^T$ nezávisí na výbere zovšeobecnenej inverzie matice $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$.*

Príklad 48. *Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a nech $\mathbf{A}^-$ je zovšeobecnená inverzia matice $\mathbf{A}$. Ukážte, že potom $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{C}(\mathbf{I}_n - \mathbf{A}^-\mathbf{A})$. Návod: Všimnite si, že ak $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}_m$ pre $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, potom $\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{A}^-\mathbf{Ax}$.*

6 Idempotentné matice a projektory

Príklad 49. *Dokážte nasledovné tvrdenie. Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Potom $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{C}(\mathbf{I}_n - \mathbf{A})$ vtedy a len vtedy, keď $\mathbf{A}$ je idempotentná. Návod: Použite tvrdenie príkladu 48.*

Príklad 50. *Nech* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *je idempotentná symetrická matica. Potom* $\mathbf{I}_n - 2\mathbf{A}$ *je ortogonálna matica. Dokážte! Nájdite geometrickú interpretáciu ortogonálnej matice* $\mathbf{I}_n - 2\mathbf{A}$ *pre prípad, že* $\mathbf{A}$ *je projektor na lineárny priestor* $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ *(aspoň pre* $n = 2$*).*

Príklad 51. *Najprv ukážte, že ak* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$*,* $\mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ *a* $\mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{C}$*, tak* $\mathbf{A}\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{C}$*. (Využite rovnosť* $(\mathbf{AB} - \mathbf{AC})^T(\mathbf{AB} - \mathbf{AC}) = (\mathbf{B}^T - \mathbf{C}^T)(\mathbf{A}^T\mathbf{AB} - \mathbf{A}^T\mathbf{AC})$*.) Pomocou tohto tvrdenia dokážte, že ak* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *je symetrická matica a* $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2$*, tak* $\mathbf{A}$ *je idempotentná.*

Príklad 52. *Nech* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *sú symetrické idempotentné matice, pre ktoré platí* $\mathcal{C}(\mathbf{A}) = \mathcal{C}(\mathbf{B})$*. Potom* $\mathbf{A} = \mathbf{B}$*. Dokážte!*

Príklad 53. *Nájdite nejakú nesymetrickú idempotentnú maticu typu* 2×2*.*

Príklad 54. *Nájdite ortogonálny projektor na a) priamku* $\{c\mathbf{1}_n \in \mathbb{R}^n : c \in \mathbb{R}\}$*; b) rovinu* $\{(c, d, d)^T \in \mathbb{R}^3 : c, d \in \mathbb{R}\}$*; c) priestor* $\mathcal{C}(\mathbf{X})$*, kde*

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Príklad 55. *Nech vektory* $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^n$ *tvoria ortonormálnu bázu priestoru* $\mathbb{R}^n$*, čiže* $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n$ *je systém navzájom ortogonálnych vektorov normy 1. Nech* $k \in \{1, 2, ..., n\}$*. Dokážte, že* $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i\mathbf{u}_i^T$ *je projektor na priestor* $\mathcal{C}(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k)$ *generovaný vektormi* $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k$*.*

Príklad 56. *Dokážte tvrdenie: Nech* $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times p}$ *a* $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n\times q}$*, pričom* $\mathcal{C}(\mathbf{Y}) \subseteq \mathcal{C}(\mathbf{X})$*. Potom* $\mathbf{P}_\mathbf{Y}\mathbf{P}_\mathbf{X} = \mathbf{P}_\mathbf{Y}$*.*

Príklad 57. *Nech* $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$*. Dokážte, že* $\mathbf{P}$ *je ortogonálny projektor na priestor* $\mathcal{U} = \mathcal{C}(\mathbf{P})$ *vtedy a len vtedy, keď je* $\mathbf{P}$ *symetrická idempotentná matica.*

Príklad 58. *Nech* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$*. a) Nájdite predpis pre projektor* $\mathbf{P}_\mathbf{x}$ *zobrazujúci na priestor* $\mathcal{C}(\mathbf{x})$ *generovaný vektorom* $\mathbf{x}$*. b) Ukážte, že* $\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{y} = \mathbf{P}_\mathbf{x}(1, 0)^T$ *pre nejaké* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\}$ *je kružnica so stredom v bode* $(1/2, 0)^T$ *a polomerom* $1/2$*.*

7 Determinant matice

Príklad 59. *Ukážte, že determinant ortogonálnej matice môže byť len 1 alebo −1. Nech* $\mathbf{U} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$*. Nájdite geometrickú charakterizáciu vzťahu vektorov* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$*, na základe ktorej je možné rozhodnúť, či* $|\mathbf{U}| = 1$ *alebo* $|\mathbf{U}| = -1$*.*

Príklad 60. *Ukážte, že determinant idempotentnej matice môže byť len 0 alebo 1. Ukážte, že ak má idempotetná matica determinant 1, tak to nutne musí byť jednotková matica.*

Príklad 61. *Z definície determinantu ukážte, že*

$$\left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right| \left|\begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}\right|.$$

Príklad 62. *Nech* $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ *a* $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *sú regulárne matice a nech* $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m\times n}$*,* $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n\times m}$*. Pomocou vety o determinante blokovej matice ukážte, že* $|\mathbf{T}||\mathbf{W} - \mathbf{V}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{U}| = |\mathbf{W}||\mathbf{T} - \mathbf{U}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{V}|$*.*

Príklad 63. *Použite predchádzajúci príklad na dôkaz tvrdení: a)* $|\mathbf{A}+\mathbf{x}\mathbf{x}^T| = |\mathbf{A}|(1+\mathbf{x}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x})$ *pre akúkoľvek regulárnu maticu* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *a akýkoľvek vektor* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$*; b)* $|\mathbf{I}_m + \mathbf{C}\mathbf{D}| = |\mathbf{I}_n + \mathbf{D}\mathbf{C}|$ *pre akékoľvek matice* $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n\times m}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m\times n}$*.*

Príklad 64. *Nech* $a, b \in \mathbb{R}$*. Dokážte, že determinant úplne symetrickej matice* $\mathbf{A} = a\mathbf{I}_n + b\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^T$ *je* $|\mathbf{A}| = a^{n-1}(a+nb)$*. (Návod: K prvému riadku matice* $\mathbf{A}$ *pripočítajte všetky zvyšné riadky a následne odpočítajte prvý stĺpec od všetkých zvyšných stĺpcov.)*

Príklad 65. *Nech* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *sú regulárne matice. Dokážte, že* $\mathrm{adj}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = \mathrm{adj}(\mathbf{B})\mathrm{adj}(\mathbf{A})$*. (Toto tvrdenie platí aj bez predpokaldu regularity, ale dôkaz je už komplikovnejší.)*

8 Vlastné čísla, vlastné vektory, pozitívne semidefinitné a pozitívne definitné matice

Príklad 66. *Nájdite (reálne) spektrum matíc*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} a \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Príklad 67. *Nájdite spektrum matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Presvedčte sa, že $\mathbf{A}$ *je pozitívne definitná (pomocou spektra aj pomocou Syvestrovho kritéria).*

Príklad 68. *Nech* $\mathbf{A}$ *je symetrická matica typu* $n \times n$*, nech* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *sú jej vlastné čísla (so zopakovaním podľa ich násobnosti) a nech* $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n$ *je ortonormálny systém prislúchajúcich vlastných vektorov. Ukáže, že potom matica* $\mathbf{A}^+ = \sum_{i;\lambda_i\neq 0} \lambda_i^{-1}\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i^T$ *je zovšeobecnená inverzia matice* $\mathbf{A}$*. Presvedčte sa, že okrem* $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$ *platí aj* $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$*.*

Príklad 69. *Nech* $a, b \in \mathbb{R}$ *a nech* $\mathbf{A} = a\mathbf{I}_n + b\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^T$ *je úplne symetrická matica. Ukážte, že potom je vlastným vektorom matice* $\mathbf{A}$ *vektor* $\mathbf{1}_n$ *a tiež akýkoľvek vektor kolmý na* $\mathbf{1}_n$*. Pre maticu* $\mathbf{A}$ *nájdite vlastné čísla a ich násobnosti.*

Príklad 70. *Ukážte, že každý projektor* $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *je pozitívne semidefinitná matica. Ukážte, že spektrum projektora neobsahuje iné čísla ako* 0 *a* 1*. Charakterizujte vlastný priestor projektora* $\mathbf{P}$ *zodpovedajúci vlastnému číslu* 0 *(ak* $\mathbf{P} \neq \mathbf{I}_n$*) a vlastný priestor projektora* $\mathbf{P}$ *zodpovedajúci vlastnému číslu* 1 *(ak* $\mathbf{P} \neq \mathbf{0}_{n\times n}$*).*

Príklad 71. *Dokážte, že ak* $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^T$*, kde* $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *je ortogonálna matica a* $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$*, tak* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *sú vlastné čísla matice* $\mathbf{A}$ *a stĺpce matice* $\mathbf{U}$ *sú vlastné vektory matice* $\mathbf{A}$*. ("Hlavná veta" z prednášky je v istom zmysle "opačná" k tomuto tvrdeniu a jej dôkaz je oveľa ťažší.)*

Príklad 72. *Nech* $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^T$ *je pozitívne semidefinitná matica, kde* $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *je ortogonálna matica a* $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$*. Presvedčte sa, že* $\lambda_i \geq 0$ *pre všetky* $i = 1, ..., n$*. Definujme maticu* $\mathbf{A}^{1/2} = \mathbf{U}\Lambda^{1/2}\mathbf{U}^T$*, kde* $\Lambda^{1/2} = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})$*. Presvedčte sa, že* $\mathbf{A}^{1/2}$ *je symetrická pozitívne semidefinitná matica, ktorá spĺňa* $\mathbf{A}^{1/2}\mathbf{A}^{1/2} = \mathbf{A}$*. Formulujte analogické tvrdenie pre pozitívne definitnú maticu* $\mathbf{A}$*.*