Maticová algebra pre štatistikov (1-PMA-215)

otázky na skúšku pre školský rok 2016/17

Radoslav Harman, KAMŠ, FMFI UK

3. decembra 2016

1. Napíšte presné definície nasledujúcich pojmov: Súčin matíc, komutujúce matice, horná trojuholníková matica, dolná trojuholníková matica, symetrická matica, diagonálna matica. Akú vlastnosť nazávame asociativita (súčtu, násobenia)? Čo je to distributívna vlastnosť násobenia vzhľadom na sčítanie?

2. Napíšte definíciu stĺpcového priestoru matice. Napíšte základnú vetu o inklúzii stĺpcových priestorov, čiže vetu o charakterizácii platnosti $\mathcal{C}(\mathbf{B}) \subseteq \mathcal{C}(\mathbf{A})$ pre matice $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ a $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Túto vetu dokážte.

3. Definujte pojem lineárnej nezávislosti matíc $\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $k \in \mathbb{N}$. Definujte pojem bázy lineárneho priestoru $\mathbb{R}^{m \times n}$. Má každý priestor $\mathbb{R}^{m \times n}$ bázu? Je lineárny vektorový priestor $\mathbb{R}^{m \times n}$ izomorfný s lineárnym vektorovým priestorom $\mathbb{R}^s$ pre nejaké s? Odpovede zdôvodnite.

4. Definujte pojem hodnosť matice. Uveďte príklad matice typu 3×4, ktorá má hodnosť 2. Formulujte vetu o "**BT** rozklade" matice $\mathbf{A}$ hodnosti r. Ak $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times k}$, čo vieme povedať o vzťahu medzi hodnotami $\text{rank}(\mathbf{CD})$, $\text{rank}(\mathbf{C})$, $\text{rank}(\mathbf{D})$?

5. Definujte pojem stopa matice. Vymenujte základné vlastnosti stopy matice (resp. funkcie $\text{tr} : \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}$). Dokážte, že $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$ pre akúkoľvek dvojicu matíc $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

6. Definujte skalárny súčin matíc, (Frobeniovu) normu matice a uhol medzi nenulovými maticami. Formulujte Cauchy-Schwarzovu nerovnosť pre matice.

7. Napíšte definíciu ortogonálnej množiny matíc. Dokážte, že každá ortogonálna množina nenulových matíc je nezávislá. Má každý priestor $\mathbb{R}^{m \times n}$ nejakú ortogonálnu bázu? Čo je to ortonormálna množina matíc?

8. Formulujte vetu o Gramm-Schmidtovej ortogonalizácii a vetu o "**QR** rozklade" matice.

9. Napíšte definíciu ortogonálneho komplementu (doplnku) $\mathcal{U}^\perp$ lineárneho priestoru $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ a vymenujte jeho základné vlastnosti. Napíšte definíciu nulového priestoru $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ matice $\mathbf{A}$. Charakterizujte $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ pomocou $\mathcal{C}(\mathbf{A}^T)$.

10. Nech $\mathbf{A}$ je matica. Aký je vzťah medzi priestormi $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ a $\mathcal{C}(\mathbf{AA}^T)$? Svoje tvrdenie dokážte. Aký je vzťah medzi hodntami $\text{rank}(\mathbf{A})$ a $\text{rank}(\mathbf{AA}^T)$?

11. Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ a $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times p}$. Definujte pojem konzistencie lineárneho systému $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ (v $\mathbf{X}$). Musí byť každý lineárny systém konzistentný? Dokážte, že systém $\mathbf{A}^T\mathbf{AX} = \mathbf{A}^T\mathbf{B}$ je konzistentný (konzistencia systému "normálnych rovníc").

12. Definujte ľavú a pravú inverziu matice a napíšte základné vlastnosti týchto inverzií. Definujte pojem invertovateľná matica. Vymenujte základné vlastnosti inverzie regulárnej štvorcovej matice.

13. Definujte pojem ortogonálna matica. Napíšte predpis pre ortogonálnu maticu typu 2×2, ktorá zodpovedá rotácii o uhol θ proti smeru hodinových ručičiek. Napíšte tiež všeobecný tvar Helmertovej matice pre vektor $\mathbf{a}$.

14. Definujte pojem permutačná matica a zdôvodnite, prečo je každá permutačná matica ortogonálnou maticou. Aký má permutačná matica determinant? Koľko je permutačných matíc typu $n \times n$? Nech $0 \leq i < j \leq n$. Napíšte predpis pre maticu $\mathbf{P}^{(i,j)} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tak, aby zobrazenie $\mathbf{A} \to \mathbf{P}^{(i,j)}\mathbf{A}$ zodpovedalo výmene riadkov i a j matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

15. Nech $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ je regulárna a nech $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times r}$, $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times r}$. Charakterizujte hodnosť blokovej matice s blokmi $\mathbf{T}, \mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$ pomocou hodnosti Schurovho doplnku. Napíšte predpis pre inverziu tejto blokovej matice za predpokladu, že $\mathbf{V}$ je nulová.

16. Definujte pojem zovšeobecnená inverzia matice $\mathbf{A}$. Napíšte vetu o charakterizácii množiny všetkých zovšeobecnených inverzií matice $\mathbf{A}$. (Alebo aspoň popíšte postup, ktorým je možné získať jednu zovšeobecnenú inverziu matice $\mathbf{A}$.)

17. Napíšte vetu o vyjadrení zovšeobecnenej inverzie matice $\mathbf{A}$ pomocou "$\mathbf{BT}$-rozkladu", ľavej a pravej inverzie. Napíšte vetu o vyjadrení všetkých prvkov množiny $\mathcal{G}^-(\mathbf{A})$ pomocou jednej zovšeobecnenej inverzie matice $\mathbf{A}$.

18. Formulujte vetu o charakterizácii množiny riešení konzistentného systému lineárnych rovníc pomocou zovšeobecnej inverzie a vymenujte niektoré jej dôsledky.

19. Napíšte definíciu idempotentnej matice. Napíšte tri rôzne idempotentné matice typu 3×3. Dokážte, že stopa idempotentnej matice je rovná jej hodnosti.

20. Formulujte vetu o jednoznačnosti a existencii ortogonálnej projekcie vektora na lineárny priestor (základná veta o ortogonálnej projekcii).

21. Napíšte definíciu matice (ortogonálnej) projekcie na priestor $\mathcal{C}(\mathbf{X})$, kde $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Vymenujte aspoň 4 základné vlastností projekčných matíc. Vyjadrite maticu projekcie na priestor $\mathcal{C}^{\perp}(\mathbf{X})$ pomocou matice $\mathbf{P}$ projekcie na priestor $\mathcal{C}(\mathbf{X})$.

22. Definujte pojem determinantu matice (pomocou Leibnitzovej formule) a vymenujte aspoň 5 základných vlastností determinantu.

23. Definujte pojem adjungovaná matica k matici $\mathbf{A}$. Napíšte Laplaceov rozvoj determinantu matice $\mathbf{A}$ pomocou prvkov matice $\mathrm{adj}(\mathbf{A})$. Vyjadrite inverziu regulárnej matice $\mathbf{A}$ pomocou $\det(\mathbf{A})$ a $\mathrm{adj}(\mathbf{A})$.

24. Uveďte definíciu pojmu pozitívne semidefinitná a pozitívne definitná matica. Vymenujte základné vlastnosti pozitívne semidefinitných a pozitívne definitných matíc. Napíšte vetu o Choleského rozklade.

25. Definujte pojem vlastné číslo, vlastný vektor, spektrum matice a násobnosť vlastnej hodnoty. Sami si vymyslite príklad matice (nie diagonálnej), pre ktorú uvediete vlastné hodnoty, vlastné vektory (jeden pre každú vlastnú hodnotu), spektrum a uvediete násobnosť každej vlastnej hodnoty.

26. Formulujte základnú (hlavnú) vetu o vlastných číslach a vlastných vektoroch symetrických matíc a uveďte dôsledky tejto vety.

27. Nech $\mathbf{A}$ je symetrická matica. Vyjadrite $\mathrm{tr}(\mathbf{A})$, $\|\mathbf{A}\|$, $\det(\mathbf{A})$ a $\mathrm{rank}(\mathbf{A})$ pomocou vlastných hodnôt matice $\mathbf{A}$.