1 Vzorové písomky č.1 - predmet 1-PMA-215

Príklad 1. *Napíšte definíciu stĺpcového priestoru matice. Nech* $\mathbf{A}$ *je štvorcová matica. a) Dokážte, že* $\mathcal{C}(\mathbf{A}^k) \subseteq \mathcal{C}(\mathbf{A})$ *pre každé prirodzené číslo* k*. b) Dokážte, že ak* $\mathcal{C}(\mathbf{A}^2) = \mathcal{C}(\mathbf{A})$*, potom* $\mathcal{C}(\mathbf{A}^k) = \mathcal{C}(\mathbf{A})$ *pre každé prirodzené číslo* k*.*

Príklad 2. *Napíšte definíciu (Frobeniovej) normy matice a definíciu kosínu uhla medzi dvomi nenulovými maticami rovnakého typu. Dokážte kosínusovú vetu pre matice, čiže dokážte, že ak* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *sú nenulové matice, tak* $\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|^2 = \|\mathbf{A}\|^2 + \|\mathbf{B}\|^2 - 2\|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\| \cos(\gamma)$*, kde* γ *je uhol medzi* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$*.*

Príklad 3. *Napíšte definíciu nulového priestoru matice typu* $m \times n$*. Nájdite aspoň jednu bázu priestoru* $\mathcal{N}^{\perp}(\mathbf{A})$*, kde*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Príklad 4. *Napíšte definíciu inverzie matice. Maticu* $\mathbf{A}$ *typu* $n \times n$ *nazývame úplne symetrickou, ak* $\mathbf{A} = a\mathbf{I}_n + b\mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^T$ *pre nejaké* $a, b \in \mathbb{R}$*. Ukážte, že ak* $a \neq 0$*,* $b \neq -a/n$*, potom inverzia úplne symetrickej matice je tiež úplne symetrická matica.*

Príklad 5. *Definujte pojem ortogonálnej matice. Nájdite aspoň jednu ortogonálnu maticu, ktorej posledný stĺpec je* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2},)^T$*.*

Príklad 1. *Definujte pojem ortogonálnej matice. Nájdite nejakú ortogonálnu maticu* $\mathbf{U}$ *typu* 2×2*, ktorej druhá mocnina nie je jednotková matica, ale štvrtá mocnina je jednotková matica (t.j.* $\mathbf{U}^2 \neq \mathbf{I}_2$*,* $\mathbf{U}^4 = \mathbf{I}_2$*). Nájdite nejakú ortogonálnu maticu typu* 3×3*, ktorej prvý stĺpec je* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$*.*

Príklad 2. *Definujte skalárny súčin matíc a normu matice. Napíšte znenie Cauchyho-Schwarzovej nerovnosti pre matice. Dokážte nasledovné tvrdenie: Nech* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *a* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$*. Potom* $\|\mathbf{Ba}\| \leq \|\mathbf{B}\|\|\mathbf{a}\|$*. Pomôcka:* $\|(\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_m)^T\mathbf{a}\|^2 = \sum_{i=1}^m (\mathbf{b}_i^T\mathbf{a})^2$ *pre akékoľvek vektory* $\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_m, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$*.*

Príklad 3. *Napíšte definíciu inverzie matice. Maticu* $\mathbf{B}$ *typu* $m \times m$ *nazývame úplne symetrickou, ak* $\mathbf{B} = (a - b)\mathbf{I}_m + b\mathbf{1}_m\mathbf{1}_m^T$ *pre nejaké* $a, b \in \mathbb{R}$*. Ukážte, že ak* $a \neq b$*,* $a \neq (1 - m)b$*, potom inverzia úplne symetrickej matice je tiež úplne symetrická matica.*

Príklad 4. *Definujte stĺpcový priestor matice a nulový priestor matice. Nech* $\mathcal{U}$ *je podpriestor lineárneho vektorového priestoru* $\mathcal{V}$*. Definujte ortogonálny doplnok priestoru* $\mathcal{U}$ *v priestore* $\mathcal{V}$*. Nech* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ *a* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$*. Dokážte, že* $\mathcal{N}(\mathbf{AB}) \supseteq \mathcal{N}(\mathbf{B})$*.*

Príklad 5. *Napíšte definíciu symetrickej matice a definujte pojem "komutujúce matice". Dokážte nasledovné tvrdenie: Nech* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *sú symetrické matice a nech aj matica* $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ *je symetrická. Potom matice* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *komutujú.*