1 Vzorové písomky č.2 - predmet 1-PMA-215

Príklad 1. *Napíšte definíciu zovšeobecnenej inverzie matice* $\mathbf{A}$*. Nájdite aspoň jednu zovšeobecnenú inverziu matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Príklad 2. *Definujte projektor na priestor* $\mathcal{C}(\mathbf{X})$*, kde* $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times k}$*. Nech vektory* $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^n$ *tvoria ortonormálnu bázu priestoru* $\mathbb{R}^n$*, čiže* $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n$ *je systém navzájom ortogonálnych vektorov normy* 1*. Nech* $k \in \{1, 2, ..., n\}$*. Dokážte, že* $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{k} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^T$ *je projektor na priestor* $\mathcal{C}(\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k)$ *generovaný vektormi* $\mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_k$*.*

Príklad 3. *Napíšte definíciu determinantu matice* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$*. Vypočítajte determinant matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Príklad 4. *Definujte násobnosť vlastnej hodnoty* λ *matice* $\mathbf{A}$*. Nech* $\mathbf{A}$ *je symetrická matica typu* $n \times n$*. Dokážte, že* $\mathbf{A}$ *má jedinú vlastnú hodnotu* λ *násobnosti* n *vtedy a len vtedy, keď* $\mathbf{A} = \lambda \mathbf{I}_n$*.*

Príklad 5. *Definujte pojem pozitívne definitnej matice. Nech* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *je symetrická matica, ktorej všetky vlastné čísla sú kladné. Dokážte, že* $\mathbf{A}$ *je pozitívne definitná matica.*

Príklad 1. *Definujte pojem zovšeobecnená inverzia matice a pojem idempotentná matica. Nech* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *je idempotentná matica. Ukážte, že potom pre akúkoľvek maticu* $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *platí, že* $\mathbf{A} + \mathbf{Z} - \mathbf{AZA}$ *je zovšeobecnená inverzia matice* $\mathbf{A}$*. Ukážte, že pre akúkoľvek zovšeobecnenú inverziu* $\mathbf{G}$ *matice* $\mathbf{A}$ *platí, že* $\mathbf{G} = \mathbf{A} + \mathbf{Z} - \mathbf{AZA}$ *pre nejakú maticu* $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n\times n}$*.*

Príklad 2. *Nájdite aspoň jednu zovšeobecnenú inverziu matice*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Príklad 3. *Napíšte definíciu determinantu matice* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$*. Nech* $n \in \mathbb{N}$*. Nájdite determinant matice* $\mathbf{A}_n$ *typu* $(n+1) \times (n+1)$*, ktorej prvý riadok pozostáva zo samých jednotiek, všetky prvky tesne pod diagonálou majú hodnotu* -1 *a všetky ostatné prvky matice* $\mathbf{A}_n$ *sú nulové, čiže presnejšie:*

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_n^T & 1 \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0}_n \end{pmatrix}.$$

Ak by ste nevedeli príklad vyriešiť pre všeobecné n*, tak ho vypočítajte aspoň pre* $n = 2, 3, 4$*.*

Príklad 4. *Definujte spektrum štvorcovej matice* $\mathbf{A}$ *a násobnosť vlastnej hodnoty* λ *matice* $\mathbf{A}$*. Nech* $\mathbf{U}$ *je ortogonálna matica rovnakého typu ako* $\mathbf{A}$*. Ukážte, že matica* $\mathbf{UAU}^T$ *ma rovnaké spektrum ako* $\mathbf{A}$*. Dokážte, že násobnosť vlastného čísla* λ *pre maticu* $\mathbf{A}$ *je rovnaká ako násobnosť vlastného čísla* λ *pre maticu* $\mathbf{UAU}^T$*. (Môžete použiť fakt, že násobenie regulárnou maticou nemení hodnosť.)*

Príklad 5. *Napíšte predpis pre projektor* $\mathbf{P}$ *na priestor* $\mathcal{U} = \mathcal{C}(\mathbf{X})$*, kde* $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n\times k}$*. Napíšte tiež definíciu pozitívne semidefinitnej matice. Zdôvodnite, prečo je* $\mathbf{P}$ *symetrická pozitívne semidefinitná matica. Ukážte, že každý nenulový vektor* $z \in \mathcal{U}$ *je vlastný vektor matice* $\mathbf{P}$*. Ukážte, že každý nenulový vektor* $z \in \mathcal{U}^\perp$ *je tiež vlastný vektor matice* $\mathbf{P}$*.*