Náhodná premenná a jej stredná hodnota

Radoslav Harman

Katedra aplikovanej matematiky a štatistiky
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského, Bratislava

Sústredenie KMS
3.2.2009

Poznámky pre verziu na internete.

Táto prednáška bola odprednášaná 3. februára 2009 na sústredení korešpondenčného matematického seminára v škole v prírode ”Patrovec” pri Trenčianskom Jastrabí. Keďže je určená pre stredoškolákov (hoci veľmi šikovných), obmedzil som sa konečné pravdepodobnostné priestory a pri formulovaní tvrdení som kládol dôraz na intuíciu a nie na formálnu presnosť.

Kľúčové slová v angličtine, ktoré sa dajú k téme prednášky vyhľadať na internete: probability space, elementary events, random variable, expected value of a random variable, law of large numbers, inclusion-exclusion formula, exponential function, Poisson distribution, harmonic series, harmonic numbers

Prehľad prednášky

- Množina elementárnych výsledkov a náhodné udalosti
- Pravdepodobnosť náhodných udalostí
- Náhodná premenná a jej pravdepodobnostné rozdelenie
- Stredná hodnota náhodnej premennej
- Zákon veľkých čísiel a linearita strednej hodnoty
- Dva väčšie príklady: Listy a obálky; rekordy

Množina elementárnych výsledkov a udalosti

- Množinu elementárnych, ďalej nerozložiteľných výsledkov experimentu, alebo pozorovania, označíme symbolom Ω.
- Každú podmnožinu $A \subseteq \Omega$ nazveme *udalosť*.

Príklad 1: Hádzanie mincou štyrikrát zasebou

- Ω je množina všetkých usporiadaných štvoríc prvkov H, Z: Napríklad (H, H, Z, Z) reprezentuje ten výsledok, že v prvých dvoch hodoch padne hlava a vo zvyšných dvoch znak.
- Udalosti sú všetky podmnožiny množiny Ω. Napríklad $A_1 = \{(Z, Z, Z, H), (Z, Z, Z, Z)\}$ je udalosť, ktorú môžeme slovne popísať ako "v prvých troch hodoch padne znak", alebo $A_2 = \{(Z, H, H, H), (H, Z, H, H), (H, H, Z, H), (H, H, H, Z)\}$ je udalosť "znak padne v práve jednom hode".

Priestor elementárnych výsledkov pre štyri hody mincou

Ω

HHHH	HZHH	ZHHH	ZZHH
HHHZ	HZHZ	ZHHZ	ZZHZ
HHZH	HZZH	ZHZH	ZZZH
HHZZ	HZZZ	ZHZZ	ZZZZ

A_2

A_1

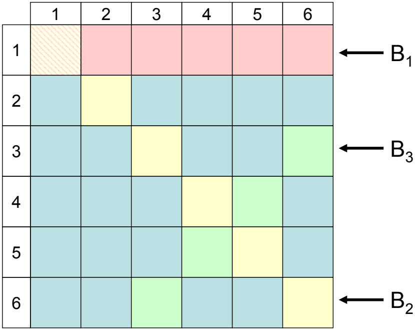
Množina elementárnych výsledkov a udalosti

Príklad 2: Hádzanie dvomi falošnými kockami

- Ω je množina všetkých usporiadaných dvojíc prvkov $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$: Napríklad $(1, 6)$ reprezentuje výsledok, že na prvej kocke padne jednotka a na druhej šestka.
- Udalosti sú všetky podmnožiny množiny Ω. Napríklad $B_1 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)\}$ môžeme slovne popísať ako udalosť, že ”na prvej kocke padne jednotka”, alebo $B_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$ ako udalosť, že ”na oboch kockách padne rovnaké číslo”, alebo $B_3 = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$ ako udalosť, že súčet výsledkov hodov bude 9 a podobne.

Priestor elementárnych výsledkov pre hádzanie dvomi kockami

Ω



Pravdepodobnosť udalostí

- Pravdepodobnosťou udalosti $A \subseteq \Omega$ nazveme číslo $P(A)$ v intervale $\langle 0, 1\rangle$. Musí platiť $P(\Omega) = 1$ a pre disjunktné udalosti $A_1, A_2, ..., A_n$ (t.j. také, ktoré nemôžu nastať súčasne) musí platiť

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

Príklad 1: Hádzanie mincou (pokračovanie)

- Každá elementárna udalosť, t.j. množina pozostávajúca z jediného elementárneho výsledku, má rovnakú pravdepodobnosť. Keďže počet elementárnych udalostí je $|\Omega| = 2^4 = 16$, musí mať každá elementárna udalosť pravdepodobnosť $1/16$. Preto pre $A \subseteq \Omega$ musí platiť

$$P(A) = |A|/|\Omega|.$$

- Napríklad udalosť A_3, že "práve na dvoch minciach padne znak", pozostáva zo $\binom{4}{2} = 6$ elementárnych výsledkov, takže

$$P(A) = 6/16 = 0,375.$$

Pravdepodobnostný priestor pre štyri hody mincou

Ω

HHHH	HZHH	ZHHH	ZZHH
HHHZ	HZHZ	ZHHZ	ZZHZ
HHZH	HZZH	ZHZH	ZZZH
HHZZ	HZZZ	ZHZZ	ZZZZ

A_3

$$P(A_3) = 6/16$$

Pravdepodobnosť udalostí

Príklad 2: Hádzanie kockami (pokračovanie)

- Kocky sú falošné, takže tomto prípade už nemá každá elementárna udalosť rovnakú pravdepodobnosť. Napríklad ak by na každej kocke padala šestka s pravdepodobnosťou $1/2$ a ostatné čísla s pravdepodobnosťou $1/10$, tak pravdepodobnosti elementárnych výsledkov sú:
- Udalosť B_1, že "na prvej kocke padne jednotka", má pravdepodobnosť $1/10$, hoci $|B_1|/|\Omega| = 1/6$.
- Alebo udalosť B_2, že "na oboch kockách padne rovnaké číslo" má pravdepodobnosť $3/10$, aj keď $|B_2|/|\Omega| = 1/6$
- Alebo udalosť B_3, že súčet výsledkov hodov bude 9, má pravdepodobnosť $3/25$ hoci $|B_3|/|\Omega| = 1/9$.

Pravdepodobnostný priestor pre hod dvomi falošnými kockami

Ω

	1	2	3	4	5	6	
1	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,05	$\leftarrow B_1$
2	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,05	
3	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,05	$\leftarrow B_3$
4	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,05	
5	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01	0,05	
6	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,25	$\leftarrow B_2$

$$P(B_1) = 1/10,\ P(B_2) = 3/10,\ P(B_3) = 3/25.$$

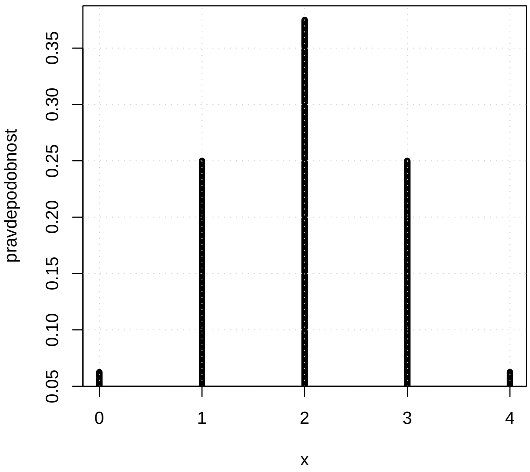
Náhodná premenná a jej rozdelenie

- Náhodná premenná X je priradenie číselných hodnôt elementárnym výsledkom experimentu, presnejšie, funkcia z množiny elementárnych výsledkov do množiny reálnych čísiel.
- Pre číselný výsledok x, ktorý náhodná premenná X nadobúda, označujeme symbolom $P[X = x]$ pravdepodobnosť tej množiny elementárnych výsledkov, ktorým X priradzuje hodnotu x.

Príklad 1: Hádzanie mincou (pokračovanie)

- Ak nás zaujíma v koľkých hodoch padne znak, zavedieme takú náhodnú premennú X, ktorá elementárnemu výsledku priradí jeho počet zložiek Z. Napríklad $X(H, H, H, H) = 0$, $X(Z, Z, H, Z) = 3$, $X(H, H, Z, Z) = 2$ a podobne.
- Náhodná premenná X môže mať za výsledok čísla $x = 0, 1, 2, 3, 4$. Platí: $P[X = 0] = 1/16$, $P[X = 1] = 4/16$, $P[X = 2] = 6/16$, $P[X = 3] = 4/16$, $P[X = 0] = 1/16$.

Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej X



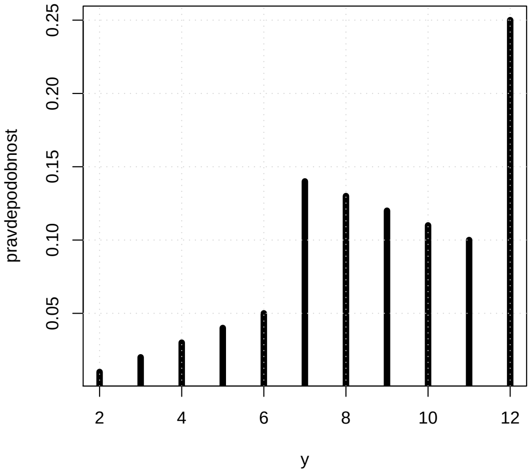
Náhodná premenná a jej rozdelenie

Príklad 2: Hádzanie kockami (pokračovanie):

- Ak nás zaujíma súčet čísiel na oboch kockách, zavedieme náhodnú premennú X, ktorá elementárnemu výsledku (i, j) priradí číslo $i + j$.
- Náhodná premenná Y môže mať za výsledok čísla $x = 2, 3, ..., 12$. Ľahko spočítame, že platí:

  $P[Y = 2] = 0,01$, $P[Y = 3] = 0,02$, $P[Y = 4] = 0,03$,
  $P[Y = 5] = 0,04$, $P[Y = 6] = 0,05$, $P[Y = 7] = 0,14$,
  $P[Y = 8] = 0,13$, $P[Y = 9] = 0,12$, $P[Y = 10] = 0,11$,
  $P[Y = 11] = 0,10$, $P[Y = 12] = 0,25$.

Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej Y



Stredná hodnota

- Strednou hodnotou náhodnej premennej nazývame, voľne povedané, ”vážený priemer” možných číselných výsledkov experimentu, kde váhy sú pravdepodobnosti nadobudnutia týchto výsledkov. Formálnejšie, ak číselnými výsledkami experimentu môžu byť hodnoty $x_1, ..., x_m$, tak potom stredná hodnota je

$$E(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i P[X = x_i]$$

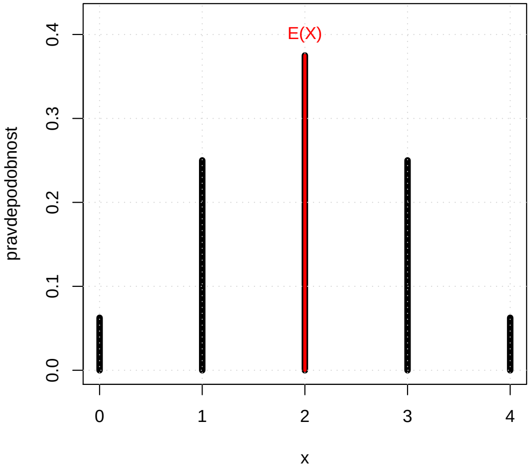
  Geometricky, stredná hodnota zodpovedá ”ťažisku diagramu rozdelenia” (obrázok bude na ďalšom frame).
- Príklad 1: Hádzanie mincou. Pre náhodnú premenú X platí:

$$E(X) = 0.\frac{1}{16} + 1.\frac{4}{16} + 2.\frac{6}{16} + 3.\frac{4}{16} + 4.\frac{1}{16} = 2.$$

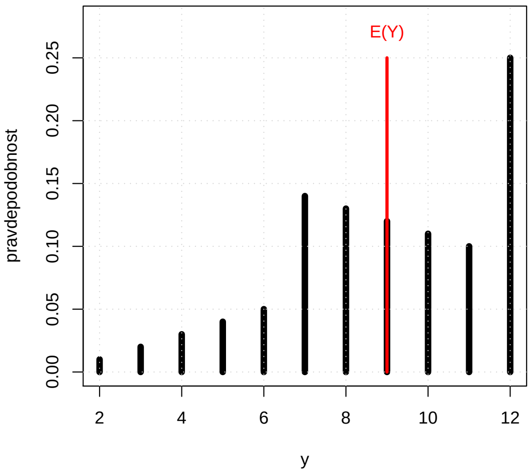
- Priklad 2: Hádzanie kockami. Pre náhodnú premennú Y platí:

$$E(Y) = 2.\frac{1}{100} + 3.\frac{2}{100} + \cdots + 12.\frac{25}{100} = 9.$$

Stredná hodnota náhodnej premennej X

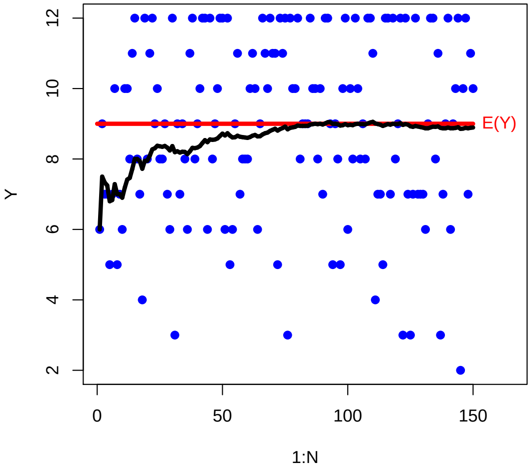


Stredná hodnota náhodnej premennej Y



Zákon veľkých čísiel

- Priemer číselných výsledkov nezávisle opakovaných realizácií náhodnej premennej sa blíži k jej strednej hodnote.



Linearita strednej hodnoty

- Ak by sme mali viac číselných charakteristík výsledku experimentu (náhodných premenných) $Z_1, Z_2, ..., Z_n$, tak

$$E(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n) = E(Z_1) + E(Z_2) + \cdots + E(Z_n).$$

- Príklad 2: Hádzanie kockami (pokračovanie). Nech Y_1 znamená výsledok na prvej kocke a Y_2 výsledok na druhej kocke. Platí: $P[Y_1 = 1] = ... = P[Y_1 = 5] = 1/10$, $P[Y_1 = 6] = 1/2$.

$$E(Y_1) = 1.\frac{1}{10} + 2\frac{1}{10} + ... + 5\frac{1}{10} + 6\frac{1}{2} = 4{,}5.$$

Podobne $E(Y_2) = 4{,}5$ a preto

$$E(Y_1 + Y_2) = E(Y_1) + E(Y_2) = 9.$$

ako už vieme, lebo $Y_1 + Y_2 = Y$ je súčet výsledkov na oboch kockách.

Listy a obálky

Sekretárka náhodne vloží n rôznych listov do n obálok s rôznymi adresami. S akou pravdepodobnosťou vloží aspoň jeden list do správnej obálky? Aká je stredná hodnota počtu listov, ktoré vloží do správnej obálky?

- Listy aj obálky si očíslujeme $1, 2, ..., n$. Priestorom elementárnych výsledkov je množina Ω všetkých $n!$ permutácií čísiel $1, 2, ..., n$, pričom permutácia $(i_1, i_2, ..., i_n)$ reprezentuje to, že list 1 bude zaradený do obálky i_1, list 2 do obálky i_2, ..., list n do obálky i_n.
- Udalosť A, na ktorej pravdepodobnosť sa v zadaní pýtame, je množina všetkých tých permutácií $(i_1, i_2, ..., i_n)$, pre ktoré $i_1 = 1$, alebo $i_2 = 2$, alebo ... $i_n = n$.
- Platí $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$, kde A_k je udalosť, že k-ty list bude zaradený do k-tej obálky, t.j. množina všetkých tých permutácií $(i_1, i_2, ..., i_n)$, pre ktoré $i_k = k$.

Listy a obálky

- $|A| = |A_1 \cup A_2 ... \cup A_n|$. Podľa princípu zapojenia-vypojenia:

$$\begin{aligned}
|A| &= \binom{n}{1}|A_1| - \binom{n}{2}|A_1 \cap A_2| + \binom{n}{3}|A_1 \cap A_2 \cap A_3| - \cdots \\
&+ (-1)^{n-1}\binom{n}{n}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| \\
&= n(n-1)! - \frac{n!}{(n-2)!2!}(n-2)! + \frac{n!}{(n-3)!3!}(n-3)! - \cdots \\
&+ (-1)^{n-1}\frac{n!}{n!1!}1! \\
&= n!\left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right).
\end{aligned}$$

- Keďže pravdep. každej elementárnej udalosti je rovnaká:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.$$

Listy a obálky

- Máme

$$P(A) = p_n = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}.$$

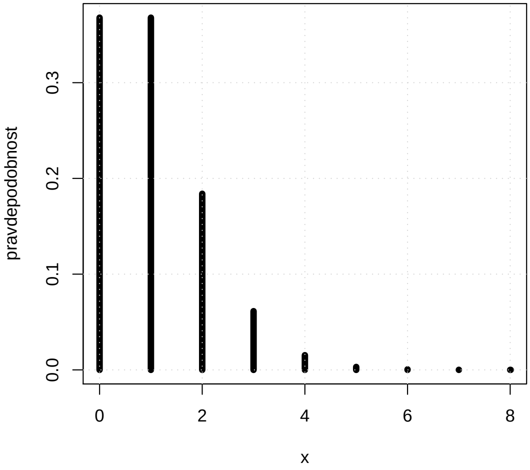
Všimnime si, že

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - \frac{1}{e}.$$

- Možno ukázať, že pravdepodobnosť počtu listov v správnej obálke konverguje k takzvanému Poissonovmu rozdeleniu s parametrom 1. Teda pre "veľké n" je pravdepodobnosť, že práve k listov sa dostane do svojej obálky približne rovná

$$p_n^{(k)} \approx \frac{1}{e.k!}.$$

Poissonove rozdelenie s parametrom 1



Listy a obálky

- Nech X je náhodná premenná, ktorá znamená počet listov, ktoré sa dostanú do správnej obálky. Formálne: X priradí elementárnemu výsledku, t.j. permutácii $(i_1, ..., i_n)$ čísiel $1, 2, ..., n$ to číslo, ktoré je rovné počtu indexov $k \in \{1, 2, ..., n\}$, pre ktoré $i_k = k$. Pýtame sa na $E(X)$.
- Nech pre $k = 1, 2, ..., m$ je X_k náhodná premenná, ktorá priradí hodnotu 1 tým elementárnym výsledkom, pre ktoré $i_k = k$ a hodnotu 0 všetkým ostatným elementárnym výsledkom. Túto náhodnú premennú nazývame indikátor udalosti, že list číslo k sa dostal do svojej správnej obálky. Platí

$$E(X_k) = 0.P[X_k = 0] + 1.P[X_k = 1] = P[X_k = 1] = \frac{1}{n}.$$

- Avšak

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_n,$$

takže

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = n.\frac{1}{n} = 1.$$

Rekordy

Predpokladajme postupnosť n navzájom nezávislých reálnych výsledkov, ktorých "náhodný charakter" sa nemení a z ktorých každý bude iný. Aká je stredná hodnota počtu zaznamenaných rekordov?

(V postupnosti $x_1, x_2, ..., x_n$ reálnych čísiel naývame rekordom x_1 a potom každé x_k, $k \geq 2$, pre ktoré platí $x_k > \max\{x_1, x_2, ..., x_{k-1}\}$.)

- Množinou elementárnych výsledkov bude množina n-tíc čísiel 0, alebo 1, pričom 1 bude stáť vždy na tom mieste, na ktorom v postupnosti zaznamenáme rekord. Napríklad pre $n = 10$ znamená elementárna udalosť $(1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$ to, že v prvý, druhý, štvrtý a siedmy výsledok bude rekordom.
- Pravdepodobnosť jednotlivých udalostí je pomerne zdĺhavé popísať; neplatí, že každá elementárna udalosť má rovnakú pravdepodobnosť.
- Zaujíma nás $E(X)$, kde X je náhodná premenná, ktorá znamená "počet rekordov", t.j. priradzujúca každému elementárnemu výsledku - nulajednotkovému vektoru - počet jednotiek.

Rekordy

- Nech pre $k = 1, 2, ..., m$ je X_k náhodná premenná, ktorá priradí hodnotu 1 tým elementárnym výsledkom, v ktorých je k-te pozorovanie rekordom a pre všetky ostatné elemenárne výsledky nech X priradí hodnotu 0. Zrejme platí

$$E(X_k) = 0.P[X_k = 0] + 1.P[X_k = 1] = P[X_k = 1] = 1/k.$$

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

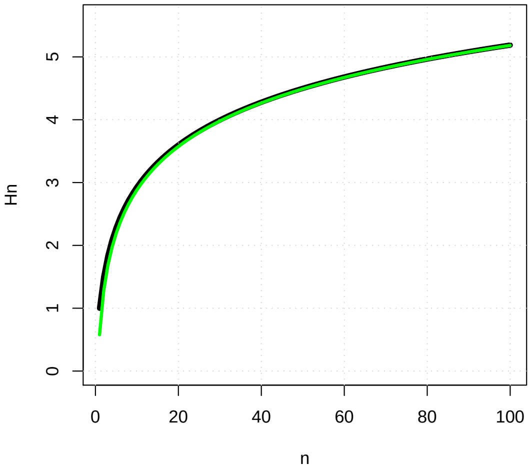
- Strednou hodnotou je teda takzvané n-té harmonické číslo, niekedy označované symbolom H_n. Platí približne

$$H_n \approx \ln(n) + \gamma,$$

  kde γ je Eulerova-Mascheroniho konštanta $\gamma = 0{,}5772...$

- Stredná hodnota počtu rekordov preto ide síce pre zväčšujúce sa n do nekonečna, ale veľmi pomaly!

Harmonické čísla



Ďakujem za pozornosť!

Radoslav Harman

harman@fmph.uniba.sk
www.iam.fmph.uniba.sk/ospm/Harman/

Táto prednáška bude prístupná na mojom
"matematickom" blogu Q.E.D.:
www.radoslav-harman.blogspot.com