

Mišo Forišek: riešenie Solitaire Army

Dokážeme, že **žiaden** konečný počet zvedov nestačí na to, aby sme sa dostali do piateho riadku.

Zvoľme si v piatom riadku ľubovoľné políčko a povedzme si: toto je to políčko, na ktorom má skončiť náš zved. Teraz dokážeme, že to nepôjde.

Trik bude nasledovný: Na políčko, ktoré má byť cieľom, napíšeme číslo 1. Na políčka, ktoré s ním stranou susedia, napíšeme číslo x . Na doteraz prázdne políčka, ktoré susedia s políčkami obsahujúcimi x , napíšeme x^2 . A tak ďalej. Na každom políčku teda bude napísané nejaké x^d , kde d je Manhattanovská vzdialenosť toho políčka od cieľa.

Takto bude vyzeráť vyplnené okolie cieľového políčka:

x^3	x^2	x	1	x	x^2	x^3
x^4	x^3	x^2	x	x^2	x^3	x^4
x^5	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	x^5
x^6	x^5	x^4	x^3	x^4	x^5	x^6
x^7	x^6	x^5	x^4	x^5	x^6	x^7
x^8	x^7	x^6	x^5	x^6	x^7	x^8
x^9	x^8	x^7	x^6	x^7	x^8	x^9

Magickú hodnotu x zvolíme tak, aby pre každé d platilo $x^d = x^{d+1} + x^{d+2}$. To je zjavne ekvivalentné s $1 = x + x^2$, a ako vhodné magické x zoberieme kladný koreň: $(\sqrt{5} - 1)/2 \sim 0.618$. Zhodou okolností je to prevrátená hodnota známeho zlatého rezu.

Načo nám bude magická hodnota dobrá?

Všimnime si ľubovoľnú pozíciu v hre. Pozrime sa na políčka, kde stoja zvedi, a sčítajme čísla, ktoré sú na nich napísané. Výsledný súčet nazveme hodnotou tejto pozície.

Čo sa teraz stane, ak spravíme skok? Ak bude ten skok smerovať „ku cieľu“, odstránime zvedov z políčok s číslami x^{d+1} a x^{d+2} a namiesto nich pridáme zveda na políčku s číslom x^d . No a vtedy sa hodnota pozície, vďaka našej šikovnej voľbe x , vôbec nezmení. Ľahko nahliadneme, že pri ľubovoľnom inom pohybe zveda sa cena pozície vždy zmenší. (Políčko, kam dopadne skáčúci zved, má nanajvýš takú hodnotu ako to, odkiaľ skákal. Určite teda stratíme aspoň hodnotu preskočeného zveda.)

Už nám chýba do cieľa len jeden krok. Sčítajme hodnotu úplne všetkých políčok v našej polrovine. To bude ľahké, lebo zjavne každý stĺpec tvorí geometrický rad.

Súčet geometrického radu začínajúceho členom x^k a majúceho kvocient x je $x^k/(1-x)$. V našom prípade máme jeden takýto rad začínajúci x^5 a po 2 začínajúce x^6, x^7, \dots . Celkový súčet je teda:

$$S = \frac{1}{1-x} \cdot (x^5 + 2x^6 + 2x^7 + \dots) = \frac{1}{1-x} \cdot \left(\frac{x^5}{1-x} + \frac{x^6}{1-x} \right) = \frac{x^5 + x^6}{(1-x)^2}$$

A ajhľa prekvapenie. Po dosadení $x = (\sqrt{5} - 1)/2$ dostávame, že S je presne rovné 1.

Nech teda na začiatku zoberieme koľko len chceme zvedov a rozmiestnime ich ako len chceme, vždy dostaneme pozíciu, ktorej hodnota bude ostro menej ako 1. A keďže pri žiadnom skoku sa hodnota pozície nezväčší, budú aj všetky pozície, do ktorých sa vieme dostať, mať hodnotu menšiu ako 1. Ale to znamená, že nikdy žiaden zved nebude stáť na cieľovom políčku, keďže už samotné cieľové políčko má hodnotu 1. □