21. októbra 2009

K úlohe "samé polovice" z blogu QED

http://radoslav-harman.blogspot.com/2009/10/same-polovice.html

Nech $A_1, ..., A_n$ sú udalosti, $P(A_i) = 1/2$ pre všetky $i = 1, ..., n$. Na základe Bonferroniho nerovností máme

$$1 \geq P(\cup_i A_i) \geq \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) = \frac{n}{2} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j).$$

Z čoho dostávame:

$$\frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) \geq \frac{n/2 - 1}{\binom{n}{2}} = \frac{n-2}{n(n-1)} =: p_n^-.$$

Takže priemer čísiel $P(A_i \cap A_j)$, $1 \leq i < j \leq n$, je minimálne p_n^-, z čoho triviálne plynie, že *aspoň jedno* z týchto čísiel je minimálne p_n^-. Čiže $p_n \geq p_n^-$. Tento dolný odhad dáva pre $n = 2, 3, 4$ hodnoty 0, 1/6 a 1/6, pričom pre $n = 2, 3, 4$ je možné priamo *nájsť* také n-tice udalostí pravdepodobnosti 1/2, pre ktoré $\max_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) = p_n^-$, takže pre tieto n platí $p_n = p_n^-$.

Aká je hodnota p_n pre $n \geq 5$ zatiaľ nevieme.