

1 Diskrétne náhodné vektory

Príklad 1.1. Pre náhodný vektor $(X, Y)^T$ platí: $P[(X, Y)^T = (0, 1)^T] = P[(X, Y)^T = (0, 0)^T] = P[(X, Y)^T = (1, 0)^T] = 1/3$. Popíšte distribučnú funkciu náhodného vektora $(X, Y)^T$. Určte $P[X = k]$ a $P[Y = k]$ pre $k = 0$ a $k = 1$. Nájdite distribučné funkcie náhodných veličín X a Y .

Príklad 1.2. Hodíme súčasne dvomi hracími kockami. Nech X znamená na koľkých kockách padlo jedno z čísiel 1, 2, 3, 4 a Y nech znamená na koľkých kockách padlo jedno z čísiel 3, 4, 5, 6. (T.j. náhodné premenné X aj Y môžu nadobudnúť len hodnoty 0, 1, alebo 2.) Popíšte distribučnú funkciu F náhodného vektora $(X, Y)^T$ (napríklad tým, že pre každú hodnotu, ktorú F nadobúda popíšete celú množinu v \mathbb{R}^2 , na ktorej ju nadobúda).

Príklad 1.3. Do n priehradok hodíme N loptičiek, pričom pravdepodobnosť zasiahnutia i -tej priehradky je π_i ($\pi_i > 0$ a $\sum_{i=1}^n \pi_i = 1$). Nech pre $i = 1, \dots, n$ náhodná premenná X_i označuje počet loptičiek, ktoré padli do i -tej priehradky. Nájdite rozdelenie náhodného vektora $(X_1, \dots, X_n)^T$. Nájdite rozdelenie náhodných premenných X_i . Nech $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Aké rozdelenie má náhodný vektor $(X_1 + X_2 + \dots + X_k, X_{k+1}, \dots, X_n)^T$?

Príklad 1.4. Náhodný vektor $(X, Y)^T$ má distribučnú funkciu F . Pomocou F vyjadrite pravdepodobnosť, že náhodný vektor $(X, Y)^T$ padne do množín **a**) $[a, b] \times [c, d]$; **b**) $[a, b] \times [c, d]$. Vyjadrenia môžu obsahovať limitu.

Príklady na precvičenie

Príklad 1.5. Dve steny drevenej kocky sme ofarbili modrou, dve červenou a dve bielou farbou, pričom dvojice stien rovnakej farby sú susedné. Túto kocku rozpílame tromi kolmými rezmi na osem kociek rovnakej veľkosti a z týchto kociek zvolíme náhodne jednu (každú s pravdepodobnosťou $1/8$). Nech X znamená počet modrých stien a Y nech znamená počet červených stien tejto náhodne zvolenej kocky. Nájdite distribučnú funkciu náhodného vektora $(X, Y)^T$ a marginálne distribučné funkcie (t.j. distribučné funkcie náhodných premenných X a Y).

Príklad 1.6. V urne je $N = N_1 + \dots + N_n$ guľičiek, z ktorých je N_1 farby 1, N_2 farby 2, ..., N_n farby n . Z urny náhodne vyberieme $m \leq N$ guľičiek bez priebežného vracania guľičiek naspäť do urny. Nech náhodná premenná X_k je počet vybraných guľičiek farby k pre $k = 1, \dots, n$. Nájdite rozdelenie náhodného vektora $(X_1, \dots, X_n)^T$, t.j. pravdepodobnosti udalostí $[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n]$ pre celé čísla x_1, \dots, x_n . Zdôvodnite, prečo má každá náhodná premenná X_i hypergeometrické rozdelenie. Nech $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Aké rozdelenie má náhodný vektor $(X_1 + X_2 + \dots + X_k, X_{k+1}, \dots, X_n)^T$?

Príklad 1.7. V Príklade 1.4 vyjadrite pomocou F pravdepodobnosť, že $(X, Y)^T$ padne do $(a, b) \times (c, d)$.

Príklad 1.8. Distribučná funkcia F náhodného vektora $(X, Y)^T$ je daná predpisom $F(x, y) = 1/4$ pre $x \in (-2, 0]$, $y > -1$; $F(x, y) = 1/2$ pre $x > 0$, $y \in (-1, 0]$; $F(x, y) = 3/4$ pre $x > 0$, $y \in (0, 1]$ a pre $x \in (0, 1]$, $y > 1$; $F(x, y) = 1$ pre $x > 1$, $y > 1$; a $F(x, y) = 0$ inak. **a)** Určte distribučné funkcie náhodných premenných X a Y . **b)** Určte rozdelenie náhodného vektora (X, Y) , t.j. $P(X = x_i, Y = y_j)$ pre všetky x_i, y_j .