2 Spojité náhodné vektory

Príklad 2.1. Spojitý náhodný vektor $(X,Y)^T$ má hustotu definovanú predpisom: $f(x,y) = (1+xy)/4$ ak $(x,y)^T \in [-1,1]\times[-1,1]$ a $f(x,y) = 0$ inak. Nájdite hustoty náhodných premenných X a Y. Nájdite podmienenú hustotu náhodnej premennej Y za podmienky $X = x$, kde $x \in (-1,1)$. Ukážte, že X a Y sú závislé.

Príklad 2.2. Najprv zvolíme bod X rovnomerne na $(0,1)$ a potom zvolíme bod Y rovnomerne na úsečke $(X,1)$ (čiže platí $0 < X < Y < 1$). Aká je pravdepodobnosť, že zo vzniknutých troch častí úsečky je možné zostaviť trojuholník?

Príklad 2.3. Dvaja kolegovia A, B prichádzajú do kancelárie autami a majú podobnú trasu cesty. Označme čas (v hodinách) od otvorenia kancelárie po príchod kolegu A (resp. B) ako X (resp. Y). Vieme, že $(X,Y)^T$ má rovnomerné rozdelenie na lichobežníku s vrcholmi $(0,0)$, $(1,1)$, $(3/4,1)$ a $(0,1/4)$. **a)** Nájdite hustotu náhodnej premennej X. **b)** Nájdite podmienenú hustotu náhodnej premennej X za podmienky $Y = y$, kde $y \in (0,1)$. **c)** Určte a zdôvodnite, či sú X a Y nezávislé.

Príklady na precvičenie

Príklad 2.4. Ukážte, že v Príklade 2.1 sú X^2 a Y^2 nezávislé náhodné premenné. (Návod: Ukážte, že $P[X^2 < a, Y^2 < b] = P[X^2 < a]P[Y^2 < b]$ pre všetky $a, b \in \mathbb{R}$.)

Príklad 2.5. Spojitý náhodný vektor $(X,Y)^T$ má hustotu: $f(x,y) = c(1-|x|-|y|)$ pre tie $x, y \in \mathbb{R}$, pre ktoré je $|x|+|y| < 1$, a $f(x,y) = 0$ inak. Nájdite hodnotu konštanty c, rozdelenie náhodnej premennej X a pravdepodobnosť, že vektor $(X,Y)^T$ padne do štvorca $(-1/2,1/2)\times(-1/2,1/2)$. Nájdite podmienenú hustotu náhodnej premennej Y za podmienky $X = x$, kde $x \in (-1,1)$. Sú náhodné premenné X a Y nezávislé? ***Riešenie:*** $c = 3/2$; $f_X(x) = (3/2)(1-|x|)^2$ pre $x \in (-1,1)$, inde 0; $P = 3/4$; X a Y nie sú nezávislé.

Príklad 2.6. Spojitý náhodný vektor $(X,Y)^T$ má hustotu f danú predpisom $f(x,y) = c(x-y)$ ak $x \in (0,1)$ a $y \in (0,x)$; a $f(x,y) = 0$ inak. Nájdite hodnotu konštanty c a marginálne hustoty náhodných premenných X a Y. Nájdite podmienenú hustotu náhodnej premennej X za podmienky $Y = y$, kde $y \in (0,1)$. Určte $P[X+Y < 1/2]$. **Riešenie:** $c = 6$. $f_X(x) = 3x^2$ pre $x \in (0,1)$, $f_X(x) = 0$ inde. $f_Y(y) = 3(1-y)^2$ pre $y \in (0,1)$, $f_Y(y) = 0$ inde. Pre $y \in (0,1)$: $f_{X|Y=y}(x) = 2(x-y)/(1-y)^2$ pre $x \in (y,1)$, $f_{X|Y=y}(x) = 0$ inde. Pre $x \in (0,1)$: $f_{Y|X=x}(y) = 2(x-y)/x^2$ pre $y \in (0,1)$, $f_{Y|X=x}(y) = 0$ inde. $P[X+Y < 1/2] = 1/16$.

Príklad 2.7. Spojitý náhodný vektor $(X,Y)^T$ má hustotu f danú predpisom $f(x,y) = c\sin(x)\sin(y)$ ak $(x,y)^T \in [0,\pi]\times[0,\pi]$ a $f(x,y) = 0$ inak. Vypočítajte normalizačnú konštantu c. Popíšte distribučnú funkciu náhodného vektora $(X,Y)^T$. Nájdite distribučné funkcie a hustoty náhodných premenných X a Y. Sú náhodné premenné X a Y nezávislé?

Riešenie: $c = 1/4$. $F_X(x) = 0$ pre $x \leq 0$, $F_X(x) = (1 - \cos(x))/2$ pre $x \in (0, \pi)$, $F_X(x) = 1$ pre $y \geq \pi$. $f_X(x) = \sin(x)/2$ pre $x \in (0, \pi)$, $f_X(x) = 0$ inde. Rovnako $F_Y(.)$, $f_Y(.)$. X a Y sú nezávislé.

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1-\cos(x))(1-\cos(y)) & \text{pre } (x,y) \in (0,\pi] \times (0,\pi], \\ \frac{1}{2}(1-\cos(x)) & \text{pre } (x,y) \in (0,\pi] \times (\pi,\infty), \\ \frac{1}{2}(1-\cos(y)) & \text{pre } (x,y) \in (\pi,\infty) \times (0,\pi], \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Príklad 2.8. Nech náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_m)^T$ má rovnomerné rozdelenie vo vnútri m-rozmernej jednotkovej gule, t.j. hustota vektora $\mathbf{X}$ je konštantná na množine $G_m(1) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m \mathbf{x}_i^2 < 1\}$. Nech náhodná premenná R reprezentuje euklidovu vzdialenosť $\mathbf{X}$ od bodu $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^m$, t.j. $R = \|\mathbf{X}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m X_i^2}$. Nájdite hustotu a strednú hodnotu náhodnej premennej R. (Pomôcka: Objem m-rozmernej gule s polomerom $r > 0$ je $vol(G_m(r)) = c_m r^m$, kde $c_m = 2\pi^{m/2}/(m\Gamma(m/2))$.) ***Riešenie***: $f_R(r) = mr^{m-1}$ pre $r \in (0,1)$ a $f_R(r) = 0$ inak; $E(R) = m/(m+1)$.

Príklad 2.9. Doba činnosti systému A má rozdelenie $Exp(\lambda)$ a doba činnosti systému B má rozdelenie $Exp(\gamma)$, pričom jednotlivé systémy pracujú nezávisle. Pomocou konštánt λ, γ vyjadrite pravdepodobnosť, že systém A bude pracovať kratšie ako systém B. ***Riešenie***: $\lambda/(\lambda + \gamma)$.