3 Rozdelenia funkcií náhodných vektorov

Príklad 3.1. Nech X, Y sú nezávislé náhodné premenné s rozdelením $Exp(\lambda)$. Nájdite hustotu náhodnej premennej $X + Y$.

Príklad 3.2. Nech X, Y sú nezávislé náhodné premenné s rovnomerným rozdelením na intervale $(0, 1)$. Nájdite hustotu a strednú hodnotu náhodnej premennej XY.

Príklad 3.3. Nech X, Y sú kladné nezávislé spojité náhodné premenné. Vyjadrite hustotu náhodnej premennej XY pomocou hustôt náhodných premenných X a Y vzorcom analogickým ku konvolučnému vzorcu.

Príklady na precvičenie

Príklad 3.4. Nech X, Y sú nezávislé náhodné premenné s rovnomerným rozdelením na intervale $(0, 1)$. Nájdite hustotu, strednú hodnotu a disperziu nasledovných náhodných premenných **a)** $X+Y$; **b)** $X-Y$. ***Riešenie:*** a) $f_{X+Y}(z) = z$ pre $z \in (0, 1)$, $f_{X+Y}(z) = 2-z$ pre $z \in (1, 2)$, $f_{X+Y}(z) = 0$ inak; $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = 1$, $D(X + Y) = D(X) + D(Y) = 1/6$. b) Ak $Y \sim R(0, 1)$, tak $1 - Y \sim R(0, 1)$, preto $X - Y$ má rovnaké rozdelenie ako $X + Y - 1$. Teda hustota $X - Y$ je rovnaká ako v časti a), ale posunutá o 1 doľava. Ďalej $E(X - Y) = E(X) - E(Y) = 0$ a $D(X - Y) = D(X + Y) = D(X) + D(Y) = 1/6$.

Príklad 3.5. Nech X, Y sú nezávislé náhodné premenné, pričom X má rovnomerné rozdelenie na intervale $(-1, 1)$ a Y má rovnomerné rozdelenie na intervale $(-2, 2)$. Nájdite hustotu, strednú hodnotu a disperziu náhodných premenných $X + Y$ a XY. ***Riešenie:*** Označme $S = X + Y$ a $V = XY$. Potom $f_S(s) = (3 + s)/8$ pre $s \in (-3, -1\rangle$, $f_S(s) = 1/4$ pre $s \in (-1, 1\rangle$, $f_S(s) = (3 - s)/8$ pre $s \in (1, 3\rangle$, $f_S(s) = 0$ inde. $f_V(v) = -(1/4)\ln(|v|/2)$ pre $v \in (-2, 2)$, $f_V(v) = 0$ inde. $E(S) = 0 = E(V)$, $D(S) = 5/3$, $D(V) = 4/9$. Súčet má takzvané lichobežníkové rozdelenie. Zrejme $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, ale aj $D(XY) = D(X)D(Y)$, lebo $E(X) = E(Y) = 0$.

Príklad 3.6. Nech X a Y sú nezávislé náhodné premenné a nech $Z = X/Y$ (predpokladáme, že $\{\omega \,|\, Y(\omega) = 0\} = \emptyset$, t.j. Y sa nikdy nerovná nule). Nájdite distribučnú funkciu a hustotu náhodnej premennej Z pre prípady **a)** $X, Y \sim Exp(1)$; **b)** $X, Y \sim Rovn(0, 1)$. Presvedčte sa, že v ani jednom z týchto dvoch prípadov nemá náhodná premenná Z konečnú strednú hodnotu. **Riešenie:** a) $f_Z(z) = \frac{1}{(1+z)^2}$ pre $z \geq 0$ a $f_Z(z) = 0$ pre $z < 0$; b) $f_Z(z) = 1/2$ pre $0 < z < 1$, $f_Z(z) = 1/(2z^2)$ pre $z \geq 1$, $f_Z(z) = 0$ inde. **Riešenie:** Pre exponenciálne. Z nezávislosti náhodných veličín X,Y dostávame, že združená hustota náhodného vektora $(X, Y)'$ je $f(x, y) = f(x)f(y) = e^{-x-y}$ pre $x > 0, y > 0$ a $f(x, y) = 0$ inak. Distribučná funkcia F_Z náhodnej veličiny Z je v bode $z > 0$ nasledovná: $F_Z(z) = P[Z < z] = P[X/Y < y] = P[Y > X/z] = \int_0^\infty \int_{x/z}^\infty e^{-x-y} dy dx =$

$\int_0^\infty e^{-x}(\int_{x/z}^\infty e^{-y}dy)dx = \int_0^\infty e^{-x}e^{-x/z}dx = \int_0^\infty e^{-(1+1/z)x}dx = 1/(1+1/z) = \frac{z}{z+1}$. Zrejme $F_Z(z) = 0$ pre $z \leq 0$. Hustotu f_Z náhodnej veličiny Z dostaneme derivovaním distribučnej funkcie: $f_Z(z) = dF_Z(z)/dz = \frac{1}{(1+z)^2}$ pre $z \geq 0$ a $f_Z(z) = 0$ pre $z < 0$.