

4 Rozdelenia funkcií náhodných vektorov II

Príklad 4.1. Nech X, Y sú nezávislé náhodné veličiny, pričom X má Poissonove rozdelenie s parametrom $\lambda > 0$ a Y má Poissonove rozdelenie s parametrom $\gamma > 0$. Ukážte, že rozdelenie náhodnej veličiny X za podmienky $X + Y = n$, kde $n \in \mathbb{N}$, je binomické s parametrami n a $p = \frac{\lambda}{\lambda + \gamma}$. (T.j. dokážte, že pre každé $k \in \{0, \dots, n\}$ platí $P[X = k | X + Y = n] = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.)

Príklad 4.2. Predpokladajme, že dĺžka vyleštenia čižiem X vojaka Š c. a k. armády (v minútach) má rozdelenie $Exp(1)$. Predpokladajme tiež, že dĺžka Y pripravenia poľného lôžka vojaka Š má takisto rozdelenie $Exp(1)$ (v minútach) a že tieto dve dĺžky sú navzájom nezávislé. Nadriadený vojaka Š spozoroval, že vojakovi trvala celá príprava s minút. Ako dlho mohlo vojakovi Š trvať vyleštenie čižiem? Teda vypočítajte hustotu X za podmienky, že $S = X + Y$ nadobúda hodnotu $S = s$.

Príklad 4.3. Nech $(X, Y)^T$ je spojitý náhodný vektor s hustotou $f(x, y) = x + y$ ak $x, y \in [0, 1]$ a $f(x, y) = 0$ inak. Vypočítajte korelačný koeficient náhodných premenných X a Y .

Príklady na precvičenie

Príklad 4.4. Nech X, Y sú nezávislé náhodné premenné s rozdelením $Exp(\lambda)$, kde $\lambda > 0$. Nájdite hustotu náhodnej premennej $Z = X/(X + Y)$. **Riešenie:** $Z \sim Rovn(0, 1)$.

Príklad 4.5. Nech spojitý náhodný vektor $(X, Y)^T$ má hustotu $f(x, y) = \frac{1}{2} \sin(x + y)$ ak $x, y \in [0, \pi/2]$ a $f(x, y) = 0$ inak. Nájdite korelačný koeficient náhodných premenných X, Y . **Riešenie:** $\rho_{X, Y} = (-\pi^2/16 + \pi/2 - 1)/(\pi^2/16 + \pi/2 - 2)$.

Príklad 4.6. Náhodný vektor $(X, Y)^T$ má hustotu $f(x, y) = 3(x + y)$ pre $x \in (0, 1)$, $y \in (0, 1 - x)$ a $f(x, y) = 0$ inak. Určte hustotu náhodnej premennej $3(X + Y)$. **Riešenie:** $f_Z(z) = \frac{z^2}{9}$ pre $z \in (0, 3)$, inde 0.

Príklad 4.7. Náhodný vektor $(X, Y)^T$ má rovnomerné rozdelenie na rovnobežníku s vrcholmi $(1, 0)$, $(3/2, 0)$, $(1/2, 1)$, $(0, 1)$. Určte: **a)** kovarianciu náhodných premenných X, Y **b)** korelačný koeficient X, Y . **Riešenie:** $cov(X, Y) = -\frac{1}{12}$, $\rho = -\sqrt{\frac{4}{5}}$