5 Charakteristické funkcie

Príklad 5.1. Nech $X \sim Pois(\lambda)$, kde $\lambda > 0$. Nájdite charakteristickú funkciu φ_X náhodnej premennej X. Pomocou φ_X nájdite $E(X)$ a $D(X)$. Ďalej zdôvodnite tvrdenie, že ak $Y \sim Pois(\beta)$, $\beta > 0$, pričom Y je nezávislá s X, tak $X + Y \sim Pois(\lambda + \beta)$. (Bez dôkazu môžete použiť $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$ pre akékoľvek *komplexné* číslo z.)

Príklad 5.2. Nech $X \sim Exp(\lambda)$. Napíšte predpis pre charakteristickú funkciu φ_X náhodnej premennej X. Pomocou charakteristickej funkcie nájdite $E(X), D(X)$. (Môžete využiť vzorce $\int_0^\infty \cos(tx)e^{-x}dx = \frac{1}{1+t^2}$ a $\int_0^\infty \sin(tx)e^{-x}dx = \frac{t}{1+t^2}$. Pomôcka: $a^2+b^2 = (a+ib)(a-ib)$ pre ľubovoľné $a, b \in \mathbb{R}$.)

Príklad 5.3. Náhodná premenná X má štandardizované Cauchyho rozdelenie, ak je X spojitá s hustotou $f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Možno ukázať, že charakteristická funkcia náhodnej premennej s týmto rozdelením je $\varphi_X(t) = e^{-|t|}$ pre $t \in \mathbb{R}$. Dokážte, že ak $X_1, X_2, ..., X_n$ sú nezávislé náhodné premenné so štandardizovaným Cauchyho rozdelením, tak aj náhodná premenná $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ má štandardizované Cauchyho rozdelenie.

Príklad 5.4. Nech n-rozmerný náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)^T$ má multinomické rozdelenie. Vieme, že potom $\mathbf{X}$ má charakteristickú funkciu $\varphi_{\mathbf{X}}(t_1, \ldots, t_n) = (e^{it_1}\pi_1 + \ldots + e^{it_n}\pi_n)^N$. Pomocou $\varphi_{\mathbf{X}}$ dokážte, že X_i má binomické rozdelenie pre každé $i = 1, ..., n$. Nech $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$. Pomocou charakteristickej funkcie tiež dokážte, že náhodný vektor $(X_1 + X_2 + ... + X_k, X_{k+1}, ..., X_n)^T$ má multinomické rozdelenie.

Príklady na precvičenie

Príklad 5.5. Nech $X \sim Bin(n, p)$, kde $n \in \mathbb{N}$ a $p \in (0, 1)$. Ukážte, že charakteristická funkcia φ_X náhodnej premennej X je $(pe^{it} + 1 - p)^n$. Pomocou φ_X nájdite $E(X)$ a $D(X)$. Dokážte, že ak X,Y sú nezávislé náhodné premenné, $X \sim Bin(n, p)$, $Y \sim Bin(m, p)$, tak $X+Y \sim Bin(n+m, p)$. (Môžete bez dôkazu využiť tvrdenie, že $(z_1+z_2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}$ pre akékoľvek prirodzené n a akékoľvek *komplexné* čísla z_1, z_2.)

Príklad 5.6. Náhodná premenná X má geometrické rozdelenie s parametrom $p \in (0, 1)$, t.j. X je diskrétna náhodná premenná nadobúdajúca hodnoty $k = 0, 1, 2, ...$ s pravdepodobnosťami $P[X = k] = p(1-p)^k$. Nájdite charakteristickú funkciu φ_X náhodnej premennej X. Pomocou φ_X vypočítajte $E(X)$. (Môžete použiť tvrdenie: Pre akékoľvek *komplexné* číslo z, také že $|z| < 1$, platí: $\sum_{n=0}^\infty z^n = 1/(1-z)$.) **Riešenie:** $\varphi(t) = \frac{p}{1-(1-p)e^{it}}$.

Príklad 5.7. Nech $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Vieme, že charakteristická funkcia X je $\varphi_X(t) = e^{i\mu t - t^2\sigma^2/2}$. Pomocou φ_X ukážte, že $E(X) = \mu$ a $D(X) = \sigma^2$. Pomocou φ_X sa presvedčte, že súčet dvoch nezávislých náhodných premenných s normálnym rozdelením je náhodná premenná, ktorá má opäť normálne rozdelenie.

Príklad 5.8. Charakteristická funkcia náhodného vektora $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ má tvar

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t_1, t_2) = \mathrm{e}^{-\frac{t_1^2}{2}} \frac{1}{1 - 2it_2}.$$

a) Nájdite charakteristickú funkciu náhodnej premennej $Y = X_1 + X_2$ a pomocou nej vypočítajte $E(Y)$. **b)** Nájdite charakteristickú funkciu náhodného vektora $(U, V, W)^T$, kde $U = 5X_1 + X_2$, $V = X_1 - X_2$ a $W = X_1 + 5X_2$. **Riešenie:** $\varphi_Y(t) = \varphi_{\mathbf{X}}(t, t)$; $E(Y) = 2$; $\varphi_{(U,V,W)}(u, v, w) = \varphi_{\mathbf{X}}(5u + v + w, u - v + 5w)$.