

6 Viacrozmerné normálne rozdelenie

Príklad 6.1. Náhodný vektor $(X, Y)^T$ má združene normálne rozdelenie, pričom $X \sim N(1, 1)$, $Y \sim N(0, 1)$ a $\text{cov}(X, Y) = 3/4$. Označme $Z = X - Y$. Nájdite $E(Z)$ a $D(Z)$. Pomocou distribučnej funkcie Φ rozdelenia $N(0, 1)$ vyjadrite $P[X > Y]$.

Príklad 6.2. Predpokladáme, že výška IQ v populácii má normálne rozdelenie $N(100, 15^2)$. Nezávisle náhodne vyberieme z populácie 2 osoby. Určte pravdepodobnosť, že a) priemer ich IQ bude pod 85, b) ich IQ sa budú od seba líšiť o menej než 15. Vieme, že $\Phi(1/\sqrt{2}) \approx 0,76025$; $\Phi(1) \approx 0,84134$; $\Phi(\sqrt{2}) \approx 0,92135$; $\Phi(2) \approx 0,97725$, kde Φ je distribučná funkcia rozdelenia $N(0, 1)$.

Príklad 6.3. Náhodné premenné X a L sú nezávislé, pričom X má rozdelenie $N(0, 1)$ a L je diskrétna náhodná premenná spĺňajúca $P(L = -1) = P(L = 1) = 1/2$. Položme $Y = XL$. Dokážte nasledovné tvrdenia: a) Y má rozdelenie $N(0, 1)$, b) X a Y sú nekorelované, c) X a Y nie sú nezávislé, d) náhodný vektor $(X, Y)^T$ nemá dvojrozmerné normálne rozdelenie.

Príklady na precvičenie

Príklad 6.4. Vyjadrite $P[|X - Y| < 1]$ pomocou distribučnej funkcie Φ rozdelenia $N(0, 1)$ pre prípady a) X a Y sú nezávislé náhodné premenné s rozdelením $N(0, 1)$; b) $(X, Y)^T$ má združene normálne rozdelenie, $X, Y \sim N(0, 1)$ a $\text{cov}(X, Y) = 1/2$.

Príklad 6.5. Nech X a Y sú nezávislé náhodné premenné, obe s normalizovaným normálnym rozdelením. Definujme $V = X + Y$ a $Z = X - Y$. Nájdite strednú hodnotu, kovariančnú maticu a hustotu náhodného vektora $(V, Z)^T$. Zdôvodnite, že V a Z sú nezávislé.

Príklad 6.6. Náhodný vektor $(X, Y)^T$ má dvojrozmerné normálne rozdelenie, pričom $E(X) = \mu_X$, $E(Y) = \mu_Y$, $D(X) = \sigma_X^2$, $D(Y) = \sigma_Y^2$ a korelačný koeficient náhodných premenných X a Y je ρ . Nájdite hustotu náhodnej premennej X za podmienky $Y = y$, kde $y \in \mathbb{R}$. Presvedčte sa, že výsledná podmienená hustota zodpovedá opäť normálnemu rozdeleniu a zistite, akú má toto rozdelenie strednú hodnotu a disperziu.