7 Viacrozmerné normálne rozdelenie a rozdelenia od neho odvodené

Príklad 7.1. Nech X a Y sú nezávislé náhodné premenné, $X \sim N(0, a^2)$, $Y \sim N(0, b^2)$ pre $a, b > 0$. Označme $Z = (X - Y, X + Y, Y)^T$. Nájdite rozdelenie náhodného vektora Z.

Príklad 7.2. Ak $X \sim N(0,1)$, tak náhodná premenná $Z = X^2$ má charakteristickú funkciu definovanú predpisom $\varphi_Z(t) = (1 - 2it)^{-1/2}$ pre všetky $t \in \mathbb{R}$. Pomocou tohto tvrdenia napíšte predpis pre charakteristickú funkciu náhodnej premennej $Z_n \sim \chi^2_n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Ukážte tiež, že ak $Z_m \sim \chi^2_m$, kde $m \in \mathbb{N}$, je nezávislá so Z_n, tak $Z_m + Z_n \sim \chi^2_{n+m}$.

Príklad 7.3. Pomocou definícií a tvrdení z prednášok sa presvedčte, že rozdelenia $Exp(1/2)$ a χ^2_2 sú identické.

Príklady na precvičenie

Príklad 7.4. Nech X a Y sú nezávislé náhodné premenné s rozdelením $N(0,1)$, nech $\rho \in (-1,1)$ a nech $a = \sqrt{(1+\rho)/2}$, $b = \sqrt{(1-\rho)/2}$. Definujme náhodné premenné U, V nasledovne: $U = aX + bY$ a $V = aX - bY$. Ukážte, že náhodný vektor $(U, V)^T$ má združene normálne rozdelenie, pričom U aj V majú rozdelenie $N(0,1)$ a korelačný koeficient premenných U a V je ρ.

Príklad 7.5. Nech X a Y sú nezávislé náhodné premenné, obe s rozdelením $N(0, \sigma^2)$. Vyjadrime vektor $(X, Y)^T$ v polárnych súradniciach $(R, \Psi)^T$, t.j. $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ a Ψ je uhol určený bodmi $(1,0)^T$, $(0,0)^T$ a $(X,Y)^T$. Nájdite združenú distribučnú funkciu náhodného vektora $(R, \Psi)^T$. Nájdite marginálne distribučné funkcie a hustoty vektora $(R, \Psi)^T$. Zdôvodnite nezávislosť R a Ψ.

Príklad 7.6. Nech $Z_n \sim \chi^2_n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Určte $E(Z_n)$ a $D(Z_n)$ pomocou a) vzťahov $E(X^2) = 1$, $E(X^4) = 3$ pre $X \sim N(0,1)$; b) charakteristickej funkcie náhodnej premennej Z_n (pozri príklad 7.2).

Príklad 7.7. Pomocou definícií a tvrdení z prednášok sa presvedčte, že Studentove rozdelenie s jedným stupňom voľnosti a štandardizované Cauchyho rozdelenie (pozri príklad 5.3) sú identické rozdelenia.

Príklad 7.8. Nech $\mathbf{X} \sim N_n(\mu, \Sigma)$, kde Σ je regulárna matica. Ukážte, že náhodná premenná $Z = (\mathbf{X} - \mu)^T \Sigma^{-1} (\mathbf{X} - \mu)$ má rozdelenie χ^2_n.