

1. Spojitý náhodný vektor $(X, Y)^T$ má hustotu $f(x, y) = x + y$ pre $x \in (0, 1)$ a $y \in (1, x + 1)$; a $f(x, y) = 0$ inak. Nájdite marginálnu hustotu f_Y a strednú hodnotu $E(Y)$ náhodnej premennej Y . (7 bodov)

2. Charakteristická funkcia náhodného vektora $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$ má tvar

$$\psi_{\mathbf{X}}(t_1, t_2) = e^{-\frac{t_1^2}{2}} \frac{1}{1 - 2it_2}.$$

Nájdite charakteristickú funkciu náhodnej premennej $Y = X_1 + X_2$ a pomocou nej vypočítajte $E(Y)$. (8 bodov)

3. Nech X, Y sú nezávislé náhodné premenné. Hustota X má tvar $f(x) = 2$ pre $x \in (0, c)$, inde 0 a hustota Y je $g(y) = 2e^{-2y}$ pre $y > 0$, inde 0. Nájdite hodnotu neznámej konštanty c a vypočítajte hustotu náhodnej premennej $Z = X + Y$. (7 bodov)

4. Náhodný vektor $(X_1, X_2, X_3)^T$ má viacrozmerné normálne rozdelenie, pričom $X_i \sim N(1, 2)$ pre $i = 1, 2, 3$, $cov(X_1, X_2) = cov(X_2, X_3) = 1/2$ a $cov(X_1, X_3) = 0$. Nech $\mathbf{U} = (X_1 + X_2, X_3)^T$. Určte a zdôvodnite aké rozdelenie má \mathbf{U} (vrátane určenia $E(\mathbf{U})$ a $var(\mathbf{U})$). Napíšte hustotu náhodnej premennej $Z = X_1 + X_2$. (8 bodov)

1. Náhodný vektor $(X_1, X_2, X_3)^T$ má viacrozmerné normálne rozdelenie, pričom $X_i \sim N(3, 4)$ pre $i = 1, 2, 3$, $cov(X_1, X_2) = 2$, $cov(X_1, X_3) = 1$ a $cov(X_2, X_3) = 0$. Nech $\mathbf{V} = (X_1 - X_3, X_2)^T$. Určte a zdôvodnite aké rozdelenie má \mathbf{V} (vrátane určenia $E(\mathbf{V})$ a $var(\mathbf{V})$). Napíšte hustotu náhodnej premennej $Y = X_1 - X_3$. (8 bodov)

2. Nech X, Y sú nezávislé náhodné premenné. Hustota X má tvar $f(x) = 3$ pre $x \in (0, b)$, inde 0 a hustota Y je $g(y) = 3e^{-3y}$ pre $y > 0$, inde 0. Nájdite hodnotu neznámej konštanty b a vypočítajte hustotu náhodnej premennej $Z = X + Y$. (7 bodov)

3. Spojitý náhodný vektor $(X, Y)^T$ má hustotu $f(x, y) = 2x + y$ pre $x \in (0, 1)$ a $y \in (1, 2 - x)$; a $f(x, y) = 0$ inak. Nájdite marginálnu hustotu f_Y a strednú hodnotu $E(Y)$ náhodnej premennej Y . (7 bodov)

4. Charakteristická funkcia náhodného vektora $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)^T$ má tvar

$$\psi_{\mathbf{Y}}(t_1, t_2) = \frac{1 + e^{it_1}}{4 - 2e^{it_2}}.$$

Nájdite charakteristickú funkciu náhodnej premennej $Z = Y_1 + Y_2$ a pomocou nej vypočítajte $E(Z)$. (8 bodov)