

1 Kombinatorická a geometrická pravdepodobnosť

Príklad 1.1. Hodíme súčasne dvomi kockami. Vypočítajte pravdepodobnosť, že
a) Na oboch kockách padne rovnaký počet bodiek; **b)** Na prvej kocke padne viac bodiek ako na druhej.

Príklad 1.2. Hodíme súčasne desiatimi mincami. Vypočítajte pravdepodobnosť, že **a)** na piatich minciach padne znak; **b)** znak padne najviac na troch minciach.

Príklad 1.3. Máme balíček 32 sedmových kariet, ktorý náhodne premiešame. Určte pravdepodobnosť, že **a)** Na vrchu balíčka bude postupne srdcové, žaluďové, guľové a listové eso; **b)** Vrchné 4 karty balíčka budú všetky menšie ako desiatka.

Príklad 1.4. V nepriehľadnom vrecku máme 12 lístkov očíslovaných $1, \dots, 12$. Z týchto lístkov náhodne vyberieme tri. Vypočítajte pravdepodobnosť, že najväčšie z vybratých čísiel bude rovné 9.

Príklad 1.5. Vo vrecku máme 24 guľčiek, z toho 5 bielych, 8 modrých a 11 červených. Z vrecka vyberieme naraz 3 guľčky (t.j. spôsobom "bez návratu"). Určte pravdepodobnosť, že **a)** Všetky 3 budú biele; **b)** Dve budú červené a jedna bude modrá.

Príklad 1.6. Dvaja kolegovia A a B prídu do spoločnej kancelárie medzi ôsmou a štrnástou hodinou. (Predpokladáme, že A a B prichádzajú nezávisle na sebe a príchod každého z nich je rovnako pravdepodobný počas celého šesťhodinového intervalu.) Vieme, že A sa zdrží v kancelárii 1 hodinu a B sa zdrží 2 hodiny. Určte pravdepodobnosť, že B príde neskôr ako A, a zároveň sa A a B stretnú.

Príklad 1.7. V intervale $(0, 1)$ zvolíme nezávisle rovnomerne náhodne tri čísla x, y, z . Nájdite pravdepodobnosť, že súčet týchto troch čísiel bude menší ako 1.

Príklad* 1.8 (Buffonova ihla). V rovine sú zakreslené rovnobežné priamky s rozstupmi L . Určte pravdepodobnosť toho, že ak na túto rovinu náhodne hodíme ihlu dĺžky $l < L$, tak pretne niektorú z priamok.

Príklady na precvičenie

Príklad 1.9. Hodíme súčasne dvomi kockami. Vypočítajte pravdepodobnosť, že **a)** Na prvej kocke padne aspoň o dve body viac ako na druhej; **b)** Absolútna hodnota rozdielu bodov na kockách bude 0,1,2, alebo 3; **c)** Počet bodiek na druhej kocke bude celočíselným násobkom počtu bodiek na prvej kocke (t.j. výsledky budú napríklad $(1, 5)$, $(2, 2)$, $(2, 4)$ a podobne). **Riešenie:** a) $5/18$; b) $5/6$; c) $7/18$.

Príklad 1.10. Hodíme súčasne desiatimi mincami. Vypočítajte pravdepodobnosť, že znak padne najmenej na štyroch a najviac na šiestich minciach. **Riešenie:** $((\binom{10}{4} + \binom{10}{5} + \binom{10}{6})/2^{10})$.

Príklad 1.11. V nepriehľadnom vrečku máme 10 lístkov, z ktorých sú 3 čierne a 7 je bielych. Z vrečka postupne vyberieme všetky lístky, pričom ich budeme ukladať vedľa seba v takom poradí, v akom sme ich vyberali. Určte pravdepodobnosť toho, že všetky tri čierne lístky budú vedľa seba. **Riešenie:** $1/15$.

Príklad 1.12. Máme balíček 32 sedmových kariet, ktorý náhodne premiešame. Určte pravdepodobnosť, že **a)** Vrchné štyri karty balíčka budú mať rovnakú výšku (t.j. všetky budú sedmičky, alebo všetky budú osmičky a podobne); **b)** Medzi vrchnými šiestimi kartami budú presne dve esá (a štyri karty iné ako eso). **Riešenie:** a) $8/\binom{32}{4}$; b) $\binom{4}{2}\binom{28}{4}/\binom{32}{6}$.

Príklad 1.13. V hre LOTO sa losuje 5 čísiel z 35. Vyhrávame cenu v I. poradí, ak vylosujú všetkých 5 nami tipovaných čísiel, v II. poradí ak uhádneme 4 čísla a v III. poradí ak uhádneme 3 čísla. Vypočítajte pravdepodobnosti výhier v jednotlivých poradiach. **Riešenie:** I. $1/\binom{35}{5}$; II. $150/\binom{35}{5}$; III. $\binom{5}{3}\binom{30}{2}/\binom{35}{5}$.

Príklad 1.14. V urne máme a bielych a b čiernych guľôčok. ťaháme dvakrát za sebou jednu guľôčku. Aká je pravdepodobnosť, že **a)** obidve guľôčky sú biele; **b)** aspoň jedna z vytiahnutých guľôčok je biela. Príklad vyriešte za predpokladu, že prvú vytiahnutú guľôčku už do urny nevraciam aj za predpokladu, že po prvom ťahu vrátime guľôčku naspäť do urny. **Riešenie:** Ak prvú nevrátime: a) $a(a-1)/((a+b)(a+b-1))$; b) $1-b(b-1)/((a+b)(a+b-1))$; Ak prvú vrátime: a) $(a/(a+b))^2$; b) $1-(b/(a+b))^2$.

Príklad 1.15. V nepriehľadnom vrečku máme 12 lístkov očíslovaných 1, ..., 12. Z týchto lístkov náhodne vyberieme tri. Vypočítajte pravdepodobnosť, že **a)** najväčšie z vybratých čísiel bude menšie ako 9; **b)** najmenšie z vybratých čísiel bude 4. **Riešenie:** a) $\binom{8}{3}/\binom{12}{3}$; b) $\binom{8}{2}/\binom{12}{3}$.

Príklad 1.16. V príklade 1.5 **a)** určte pravdepodobnosť, že všetky tri guľičky budú rôznej farby. **b)** Aká je pravdepodobnosť, že medzi desiatimi náhodne vybratými guľičkami budú 3 biele, 3 modré a 4 červené? **Riešenie:** a) $5 \cdot 8 \cdot 11/\binom{24}{3}$; b) $\binom{5}{3}\binom{8}{3}\binom{11}{4}/\binom{24}{10}$

Príklad 1.17. V príklade 1.6 určte pravdepodobnosť, že **a)** A odíde z kancelárie skôr ako B; **b)** A príde do kancelárie neskôr ako B ale súčasne odíde z kancelárie skôr ako B. **Riešenie:** a) $(36 - 5.5/2)/36$; b) $(6.6/2 - 5.5/2)/36$.

Príklad 1.18. Na úsečke dĺžky 1 zvolíme rovnomerne náhodne dva body, ktoré nám rozbijú danú úsečku na tri segmenty. Nájdite pravdepodobnosť, že **a)** zo vzniknutých segmentov bude možné zložiť trojuholník; **b)** najkratší vzniknutý segment bude menší ako $1/4$; **c)** najdlhší vzniknutý segment bude väčší ako $1/2$. **Riešenie:** a) $1/4$; b) $15/16$; c) $3/4$.

Príklad 1.19. Pravouhlá mriežka pozostáva z dvoch navzájom kolmých sústav rovnobežných priamok s rozstupom 2. Na túto rovinu hodíme kruh s priemerom 1. Vypočítajte pravdepodobnosť, že tento kruh **a)** prekryje niektorú z priamok; **b)** prekryje niektorý z priesečníkov priamok? **Riešenie:** a) $3/4$; b) $\pi/16$.

Príklad* 1.20 (Buffonov kríž). V rovine sú zakreslené rovnobežné priamky s rozstupmi L . Vytvoríme kríž zvarením dvoch ihl dĺžky $l < L$ v ich stredoch navzájom kolmo. Vypočítajte pravdepodobnosť, že ak tento kríž náhodne hodíme na rovinu, tak pretne niektorú z priamok. **Riešenie:** $2\sqrt{2}l/(\pi L)$.