

2 Axiomatická definícia pravdepodobnosti

Príklad 2.1. Hodíme vyváženou hracou kockou. (T.j. pravdepodobnosť, že na kocke padne číslo i je rovnaká pre všetky $i = 1, 2, \dots, 6$.) Na výsledkoch hádzania nás bude zaujímať iba to, či padlo číslo 6. Nájdite pravdepodobnostný priestor (Ω, \mathcal{S}, P) vhodný na modelovanie tejto situácie, t.j. navrhните postupne Ω , \mathcal{S} aj P . Formálne popíšte udalosť, že na kocke nepadla šestka.

Príklad 2.2. Nech $\Omega = \{a, b, c, d\}$ a $\mathcal{F} = \{\{a\}, \{b\}\}$. Nájdite najmenšiu σ -algebru (Ω, \mathcal{S}) takú, že $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$.

Príklad 2.3. Nech (Ω, \mathcal{S}_1) a (Ω, \mathcal{S}_2) sú σ -algebry. Nech $\mathcal{S} = \{A \subseteq \Omega : A \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2\} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$. Ukážte, že (Ω, \mathcal{S}) je σ -algebra.

Príklad 2.4. Nech (Ω, \mathcal{S}, P) je pravdepodobnostný priestor a nech A, B, C sú udalosti na tomto priestore. Nech $B \subset A$, $P(A) = P(C) = 1/2$, $P(B) = P(A \cap C) = 1/4$ a $P(B \cap C) = 1/8$. Nájdite pravdepodobnosť udalosti $A \setminus (B \cup C)$.

Príklad 2.5. Nech P_1 a P_2 sú dve pravdepodobnosti (pravdepodobnostné miery) na σ -algebri (Ω, \mathcal{S}) . Nech $\alpha \in [0, 1]$. Definujme funkciu $P : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ nasledovne: $P(A) = \alpha P_1(A) + (1 - \alpha) P_2(A)$ pre každé $A \in \mathcal{S}$. Potom P je tiež pravdepodobnosť na (Ω, \mathcal{S}) . Dokážte.

Príklad 2.6. Za okrúhlym stolom je rovnomerne rozostavených 6 stoličiek. Náhodne za tento stôl rozsadieme 6 ľudí, ktorí tvoria 3 manželské páry. Aká je pravdepodobnosť, že aspoň jeden manžel bude sedieť presne na protíľahlej strane stola ako jeho manželka?

Príklad 2.7. Do m krabíc hodíme n loptičiek ($n \geq m$), pričom pri každom hode trafíme práve jednu krabicu, každú s pravdepodobnosťou zasiahnutia $1/m$. Nájdite pravdepodobnosť, že na konci hádzania bude v každej krabici aspoň jedna loptička. (Výsledok môže byť vyjadrený v tvare sumy.)

Príklady na precvičenie

Príklad 2.8. Hodíme dvoma vyváženými mincami. Na výsledkoch hádzania nás budú zaujímať len udalosti týkajúce sa padnutých strán. Nájdite pravdepodobnostný priestor (Ω, \mathcal{S}, P) vhodný na modelovanie tejto situácie. Formálne popíšte udalosť, že na oboch minciach padla rovnaká strana (t.j. hlava-hlava, alebo znak-znak) a uveďte pravdepodobnosť tejto udalosti. **Riešenie:** $\Omega = \{(H, H), (H, Z), (Z, H), (Z, Z)\}$, $\mathcal{S} = 2^\Omega$ - rozpíšte!, $A = \{(H, H), (Z, Z)\}$, $P(A) = 1/2$.

Príklad 2.9. Nech (Ω, \mathcal{S}) je σ -algebra a nech $\emptyset \neq A \in \mathcal{S}$. Definujme nasledovný systém množín: $\mathcal{S}_A = \{A \cap B : B \in \mathcal{S}\}$. Potom (A, \mathcal{S}_A) je tiež σ -algebra. Dokážte!

Príklad 2.10. Nech I je množina indexov, nech (Ω, \mathcal{S}_i) je σ -algebra pre každé $i \in I$ a definujme $\mathcal{S} = \{A \subseteq \Omega : A \in \mathcal{S}_i \text{ pre všetky } i \in I\} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{S}_i$. Je potom tiež (Ω, \mathcal{S}) σ -algebra?

Príklad 2.11. Nech (Ω, \mathcal{S}, P) je pravdepodobnostný priestor a nech $A, B, C \in \mathcal{S}$. Ukážte, že $P(A \Delta C) \leq P(A \Delta B) + P(B \Delta C)$. (Symetrickú diferenciu definujeme $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.)

Príklad 2.12. Riešte príklad 2.6 pre 8 stoličiek a 4 páry. **Riešenie:** 3/7.

Príklad 2.13. Na množine štyroch vrcholov konštruujeme náhodný neorientovaný graf bez slučiek tým spôsobom, že každú dvojicu vrcholov spojíme s pravdepodobnosťou p a to navzájom nezávisle. Nájdite pravdepodobnosť, že výsledný graf bude obsahovať **a)** aspoň jeden izolovaný vrchol; **b)** aspoň jeden trojuholník. (Trojuholník je trojica vrcholov spojených spôsobom "každý s každým".) **Riešenie:** a) $4q^3 - 6q^5 + 3q^6$, kde $q = 1 - p$ b) $4p^3 - 6p^5 + 3p^6$.

Príklad 2.14. Náhodne vyberieme 3 rôzne čísla spomedzi $1, \dots, n$, kde $n \geq 3$. Aká je pravdepodobnosť, že sa medzi vybratými číslami budú nachádzať nejaké dve susedné čísla? **Riešenie:** $\frac{6(n-2)}{n(n-1)}$.

Príklad 2.15. Postupnosť čísiel $(1, 2, \dots, n)$ dokonale náhodne premiešame. (T.j. každá spomedzi $n!$ permutácií má rovnakú pravdepodobnosť.) Nájdite pravdepodobnosť p_n , že aspoň jedno z čísiel $1, 2, \dots, n$ bude po premiešaní na svojom pôvodnom mieste. Určte $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$. **Riešenie:** $p_n = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \cdot \binom{n}{i} \frac{(n-i)!}{n!}$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1 - e^{-1}$.

Príklad 2.16. Nech P je pravdepodobnosť na (Ω, \mathcal{S}) a nech $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{S}$. Indukciou vzhľadom na n dokážte:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$$