

3 Podmienená pravdepodobnosť a nezávislosť

Príklad 3.1. Máme urnu, v ktorej je 5 bielych, 4 modré loptičky. Náhodne vyberieme z urny jednu loptičku. Ak bude biela, vrátime ju do urny spolu s novou bielou loptičkou. Ak bude modrá, vrátime ju do urny spolu s dvomi novými modrými loptičkami. Potom budeme ťahať ešte raz jednu loptičku. Určte pravdepodobnosť, že táto loptička bude biela.

Príklad 3.2. Dvaja strelci, nezávisle jeden od druhého, strieľajú do spoločného terča, každý po jednom výstrele. Z dlhodobých záznamov vieme, že pravdepodobnosť zásahu prvého je 0,8 a druhého 0,4. Vieme, že sa do cieľa trafil len jeden zo strelcov. Určte, aké je naše pravdepodobnostné očakávanie, že cieľ zasiahol prvý strelec.

Príklad 3.3. Máme dve zdanlivo rovnaké hracie kocky. Vieme však, že jedna z týchto kociek je vyvážená (každé z čísiel 1, 2, 3, 4, 5, 6 padá s pravdepodobnosťou $1/6$) a druhá kocka je falošná, na ktorej padá číslo 6 s pravdepodobnosťou $1/2$ a každé z čísiel 1, 2, 3, 4, 5 padá s pravdepodobnosťou $1/10$. Náhodne sme zvolili jednu z týchto dvoch kociek a hodili sme ju 4-krát. Z týchto štyroch hodov nám dvakrát padla šestka. Aká je pravdepodobnosť, že zvolená kocka je falošná?

Príklad 3.4. Nech A, B, C sú združené nezávislé udalosti. Ukážte, že potom nasledovné dvojice udalostí sú nezávislé: **a)** $A \cap B, C$; **b)** $A \cup B, C$.

Príklad 3.5. Dvaja hráči A a B striedavo hádžu kockou v poradí ABABAB... Hru vyhrá hráč A, ak mu skôr padne jedno z čísiel 1, 2, než padne hráčovi B jedno z čísiel 1, 2, 3 (v takomto prípade vyhráva hráč B). Ktorý hráč vyhrá s väčšou pravdepodobnosťou?

Príklady na precvičenie

Príklad 3.6. Nositeľov krvných skupín A, B, 0 a AB je v populácii 38, 34, 20 a 8 percent (čísla sú len hypotetické). Určte pravdepodobnosť, že človek náhodne vybratý z populácie môže dostať krv od druhého náhodne vybratého človeka. (Predpokladáme, že krv skupiny 0 môže dostať človek s akoukoľvek krvnou skupinou; krv skupiny A môžu dostať skupiny A a AB; B môžu dostať skupiny B a AB; AB môže dostať len skupina AB.) **Riešenie:** 0,524.

Príklad 3.7. Štyria strelci A, B, C a D budú nezávisle strieľať na spoločný cieľ, každý po jednom výstrele. Z dlhodobých výsledkov je známe, že strelci zasiahnu čiernu oblasť terča s pravdepodobnosťami: A-0.9, B-0.8, C-0.6 a D-0.2. Všetci štyria

strelci vystrelili a my sme zistili, že v čiernej oblasti terča je jediný zásah. Určte, aké je naše pravdepodobnostné očakávanie, že tento zásah patrí **a)** strelcovi A; **b)** strelcovi B; **c)** strelcovi C; **d)** strelcovi D. **Riešenie:** Približne a) 0,610; b) 0,271; c) 0,102; d) 0,017.

Príklad 3.8. Vo vrecku máme 3 na pohľad rovnaké mince. Jednu "vyváženú" typu $H - Z = 1/2 - 1/2$ a dve "falošné" typu $H - Z = 3/4 - 1/4$ a $H - Z = 1/4 - 3/4$. Náhodne sme z vrecka vybrali jednu mincu, $2m$ krát sme ju hodili, pričom nám padol m krát znak a m krát padla hlava. Aká je pravdepodobnosť, že sme z vrecka vybrali vyváženú mincu? **Riešenie:** $1/(1 + 2(3/4)^m)$.

Príklad 3.9. Nech A, B, C sú združene nezávislé udalosti. Ukážte, že potom udalosti A/B a C sú nezávislé.

Príklad 3.10. Náhodne zvolíme jedno prirodzené číslo od 1 do 30, každé s pravdepodobnosťou $1/30$. Nech $A_n, n \geq 2$, je udalosť, že zvolené číslo bude deliteľné číslom n . Sú udalosti A_2, A_3, A_5 združene nezávislé? **Riešenie:** Áno.

Príklad 3.11. **a)** Dokážte: Nech A, B sú udalosti, $0 < P(A) < 1$ a $P(B|A) = P(B|A^c)$. Potom A a B sú nezávislé. **b)** Dokážte zovšeobecnenie predchádzajúceho tvrdenia: Nech $A_1, \dots, A_n$ tvoria rozklad množiny elementárnych výsledkov na udalosti nenulovej pravdepodobnosti a nech hodnota $P(B|A_i)$ je rovnaká pre všetky $i = 1, \dots, n$. Potom udalosť B je nezávislá s každou udalosťou A_i .

Príklad 3.12. Nech A, B, C sú združene nezávislé udalosti, pričom $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/3$ a $P(C) = 1/4$. Nájdite pravdepodobnosť udalosti **a)** $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$; **b)** $(A \Delta B) \cup (A \Delta C) \cup (B \Delta C)$. **Riešenie:** a) $7/24$; b) $17/24$.

Príklad 3.13. Športovec 3 krát nezávisle vystrelil na cieľ. Pravdepodobnosti zásahov sú postupne 0,5, 0,6 a 0,7. Nájdite pravdepodobnosť toho, že **a)** v celi bude aspoň jeden zásah; **b)** v celi bude práve jeden zásah; **c)** v celi budú práve dva zásahy. **Riešenie:** a) 0,94, b) 0,29, c) 0,44.

Príklad 3.14. Test obsahuje 10 otázok, na každú sú štyri možnosti odpovede, z ktorých iba jedna je správna. Na to, aby študent urobil test, musí správne odpovedať aspoň na 6 otázok. Aká je pravdepodobnosť, že tipujúci študent urobí test? **Riešenie:** $\sum_{k=6}^{10} \binom{10}{k} p^k q^{10-k}$, kde $p = 1/4$ a $q = 3/4$. Výsledná pravdepodobnosť je približne 0,02.