4 Náhodné premenné

Príklad 4.1. Hodíme trikrát vyváženou mincou. Uvažujme pravdepodobnostný priestor $(\Omega, \mathcal{S}, P)$, kde $\mathcal{S} = 2^\Omega$ a $P(A) = |A|/|\Omega|$ pre $A \subseteq \Omega$. Nájdite množinu Ω vhodnú na modelovanie tejto situácie, definujte náhodnú premennú X, ktorá vyjadruje rozdiel medzi počtom hláv a počtom znakov (absolútnu hodnotu) a nájdite distribučnú funkciu tejto náhodnej premennej.

Príklad 4.2. Nech $(\Omega, \mathcal{S})$ je priestor udalostí (σ-algebra) a nech $A \subseteq \Omega$. Definujme zobrazenie $I_A : \Omega \to \mathbb{R}$ nasledovne: $I_A(\omega) = 1$ pre všetky $\omega \in A$ a $I_A(\omega) = 0$ pre všetky $\omega \in \Omega/A$. (Zobrazenie I_A nazývame indikátorom množiny A.) Potom I_A je náhodná premenná na tomto priestore vtedy a len vtedy, keď $A \in \mathcal{S}$. Dokážte!

Príklad 4.3. Drevenú kocku natrieme zo všetkých strán modrou farbou a potom ju rozpílime na 27 kociek identickej veľkosti. Z týchto kociek náhodne vyberieme jednu (každú s pravdepodobnosťou 1/27). Nech X znamená koľko stien vybratej kocky je zafarbených na modro. Pre náhodnú premennú X načrtnite distribučnú funkciu a nájdite $E(X)$.

Príklad 4.4. Na začiatku je v urne jedna biela loptička a jedna čierna loptička. Opakovane z urny vyberáme loptičku, pričom dodržiavame tento postup: Ak je vybratá loptička čierna, tak do urny túto čiernu loptičku vrátime, spolu s ňou do urny pridáme jednu bielu loptičku a opäť ťaháme. Ak je vybratá loptička biela tak skončíme. Nech X znamená počet výberov loptičky (vrátane vytiahnutia prvej bielej). Nájdite strednú hodnotu premennej X (Môžete využiť $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$).

Príklady na precvičenie

Príklad 4.5. Hodíme hracou kockou, o ktorej predpokladáme, že nie je falošná. Uvažujme pravdepodobnostný priestor $(\Omega, 2^\Omega, P)$, kde $\Omega = \{1, ..., 6\}$ a $P(A) = |A|/6$ pre $A \subseteq \Omega$. Nájdite distribučnú funkciu náhodnej premennej $X : \Omega \to \mathbb{R}$ definovanej ako a) $X(\omega) = \omega$ pre všetky $\omega \in \Omega$ b) $X(\omega) = \omega (\operatorname{mod} 4)$ pre všetky $\omega \in \Omega$.

Príklad 4.6. Presvečte sa, že na priestore $(\Omega, 2^\Omega)$ je každé zobrazenie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ náhodnou premennou a na priestore $(\Omega, \{\Omega, \emptyset\})$ sú náhodnými premennými len konštantné zobrazenia. Popíšte množinu všetkých náhodných premenných na σ-algebre $(\Omega, \{\Omega, \{0, 1\}, \{2\}, \emptyset\})$, kde $\Omega = \{0, 1, 2\}$.

Príklad 4.7. V nepriehľadnom vreci je 14 kusov ponožiek, z ktorých je 12 bielych a 2 sú čierne. Z vreca náhodne vyťahujeme ponožky (po jednej), až pokým nevyberieme obe čierne ponožky. Nájdite strednú hodnotu počtu ponožiek, ktoré takto z vreca vyberieme. Vieme, že $\sum_{k=2}^{14} k(k-1) = 910$. ***Riešenie:*** $E(X) = 10$.

Príklad 4.8. V urne sú loptičky s číslami $1, 2, ..., n$. Náhodne vyberieme m z týchto loptičiek (systémom bez návratu). Nech X označuje minimum z čísiel na týchto m vybratých loptičkách. Nájdite rozdelenie náhodnej premennej X. Ukážte, že $E(X) = \sum_{k=1}^{n-m+1} P[X \geq k] = \frac{n+1}{m+1}$. (Môžete použiť rovnosť: $\sum_{j=0}^{n-m} \binom{m+j}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.)

Príklad 4.9. Uvažujte príklad 4.4, ale predpokladajte, že by sme do urny po každom výbere čiernej loptičky pridávali nie bielu, ale jednu čiernu loptičku. Ukážte, že v tomto prípade by stredná hodnota čakania do výberu bielej loptičky bola nekonečná.