

## 5 Diskrétne rozdelenia

**Príklad 5.1.** V predpredaji sa na koncert predalo 23 lístkov. Divák s lístkom príde na koncert s pravdepodobnosťou 0,8 a diváci sa správajú nezávisle. Nech  $X$  je náhodná premenná popisujúca počet divákov, ktorí prídu na koncert. Nájdite rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej  $X$  a jej strednú hodnotu  $E(X)$ .

**Príklad 5.2.** Basketbalisti  $A$  a  $B$  hádžu na kôš v kolách. V každom kole vystrelia obaja hráči jednu strelu. Hrajú pokým sa nestane to, že jeden z nich v danom kole trafi a druhý netrafi. Basketbalista  $A$  zasiahne kôš s pravdepodobnosťou  $p_A \in (0, 1)$  a basketbalista  $B$  zasiahne kôš s pravdepodobnosťou  $p_B \in (0, 1)$ . Náhodná premenná  $Z$  bude predstavovať počet "nerozhodných" kôl, teda všetkých kôl okrem posledného, v ktorom sa jeden trafi a druhý netrafi. Nájdite pravdepodobnostné rozdelenie a strednú hodnotu náhodnej premennej  $Z$ .

**Príklad 5.3.** Nech  $X$  a  $Y$  sú nezávislé náhodné premenné. Nájdite rozdelenie náhodnej premennej  $Z = X + Y$ , t.j. pravdepodobnosti  $P[Z = k]$ , ak  $X, Y \sim \text{Bin}(n, p)$ , kde  $n \in \mathbb{N}$  a  $p \in (0, 1)$  (môžete použiť identitu  $\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{n}{k-i} = \binom{2n}{k}$  pre všetky celé čísla  $0 \leq k \leq 2n$ ).

### Príklady na precvičenie

**Príklad 5.4.** Na začiatku hry SCRABBLE si náhodne vyberáme 7 rôznych písmeniek spomedzi 100. Z týchto 100 písmeniek je 44 samohlások. Nech  $X$  znamená počet samohlások, ktoré si vyberieme. Nájdite rozdelenie (t.j. pravdepodobnosti  $P[X = k]$  pre  $k = 0, \dots, 7$ ) a strednú hodnotu náhodnej premennej  $X$ . Výsledok stačí nechať neupravený na konkrétne číslo. **Riešenie:**  $P[X = k] = \binom{44}{k} \binom{56}{7-k} / \binom{100}{7}$ ;  $E(X) = 3,08$ .

**Príklad 5.5.** V lotérii sa losujú 3 rôzne čísla z 13. Ak uhádneme všetky tri čísla, tak vyhráme 1000 (jednotiek bližšie nešpecifikovanej meny), ak uhádneme dve čísla, vyhráme 100 a ak uhádneme jedno číslo, vyhráme 10. Aká je stredná hodnota výhry? **Riešenie:** Približne 18,7.

**Príklad 5.6.** Pre potreby genetického algoritmu modelujeme "chromozóm dĺžky  $n$ " postupnosťou  $n$  binárnych hodnôt 0 alebo 1. Nech  $x$  je chromozóm pozostávajúci z  $k$  jednotiek a  $n - k$  núl. Chromozóm  $y$  vytvoríme z chromozómu  $x$  náhodnou "mutáciou", t.j. tak, že každý bit preklopíme na opačný s pravdepodobnosťou  $p$ . **a)** Nájdite strednú hodnotu počtu bitov, v ktorých sa bude líšiť  $x$  od  $y$ ; **b)** Nájdite strednú hodnotu počtu jednotiek, ktoré bude obsahovať chromozóm  $y$ . **Riešenie:** **a)**  $np$ ; **b)**  $(n - k)p + k(1 - p)$ .

**Príklad 5.7.** Nech  $X$  a  $Y$  sú nezávislé náhodné premenné. Nájdite rozdelenie náhodnej premennej  $Z = X + Y$ , t.j. pravdepodobnosti  $P[Z = k]$ , ak  $X, Y \sim Geo(p)$ , kde  $p \in (0, 1)$ . **Riešenie:**  $P(Z = k) = (k + 1)p^2(1 - p)^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

**Príklad 5.8.** Hodíme  $n$ -krát mincou. Sériou nazveme postupnosť za sebou idúcich rovnakých výsledkov, pred a za ktorými je výsledok opačný, alebo žiadny (t.j. začiatok, alebo koniec). Napr. pri  $n = 7$  obsahuje výsledok "HZZZHHH" tri série, výsledok "HZHZZZHZ" 6 sérií. Nech  $X$  znamená výsledný počet sérií. Nájdite rozdelenie náhodnej premennej  $X$ , t.j. hodnoty  $P[X = k]$  pre  $k = 1, \dots, n$ . Nájdite  $E(X)$  a  $D(X)$ . **Riešenie:**  $P[X = k] = \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{2^{n-1}}$ ,  $E(X) = \frac{n+1}{2}$ ,  $D(X) = \frac{n-1}{4}$ .