

7.5 Ďalšie príklady

Príklad 7.5.1. V rovine sú zakreslené rovnobežky s rozostupmi L . Na túto rovinu hodíme náhodne útvar M vytvorený z n ihiel dĺžky $l < L$ zvareníím k sebe na koncoch. a) Aká je stredná hodnota počtu priesečníkov tohoto útvaru s priamkami? b) Predpokladajme, že M je pravidelný n -uholník, $n \geq 3$, ktorého priemer je menší ako L . Aká je pravdepodobnosť, že tento útvar pretne niektorú priamku? c) Vytvoríme kríž zvareníím dvoch ihiel dĺžky $l < L$ v ich stredoch navzájom kolmo. Vypočítajte pravdepodobnosť, že ak tento kríž náhodne hodíme na rovinu, tak pretne niektorú z priamok. Pomôcka: pravdepodobnosť, že jedna náhodne hodená ihla pretne niektorú priamku je $\frac{2l}{L\pi}$.

Príklad 7.5.2. Nech X, Y a Z sú náhodné premenné. Dokážte, že platí

$$\begin{aligned} D(X + Y) &= D(X) + D(Y) + 2cov(X, Y) \\ cov(X + Y, Z) &= cov(X, Z) + cov(Y, Z). \end{aligned}$$

(Predpokladáme, že uvedené výrazy sú konečné).

Príklad 7.5.3. Na intervale $(0, 1)$ zvolíme n bodov rovnomerne náhodne a navzájom nezávisle. Uvažujme pevné $p \in (1/2, 1)$. Nech X znamená počet bodov, ktoré padnú do intervalu $(0, p)$ a nech Y znamená počet bodov, ktoré padnú do intervalu $(1 - p, 1)$. Bez pomoci indikátorov nájdite $cov(X, Y)$ (môžete využiť vzorce z predchádzajúceho príkladu).

Príklad 7.5.4. Pomocou indikátorov dokážte princíp inklúzie a exklúzie, t.j. že pre ľubovoľné množiny A_1, A_2, \dots, A_n platí

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= P(A_1) + \dots + P(A_n) - \\ &- P(A_1 \cap A_2) - \dots - P(A_1 \cap A_n) - \dots - P(A_{n-1} \cap A_n) + \\ &+ P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \dots + P(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n) - \\ &\vdots \\ &+ (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n). \end{aligned}$$