

8 Spojité náhodné premenné

Príklad 8.1. Pre distribučnú funkciu F náhodnej premennej X platí: $F(x) = x^2/2 + x + 1/2$ ak $x \in (-1, 0]$, $F(x) = -x^2/2 + x + 1/2$ ak $x \in (0, 1)$, $F(x) = 1$ ak $x \geq 1$ a $F(x) = 0$ inak. Nájdite hustotu náhodnej premennej X , $E(X)$ a $D(X)$.

Príklad 8.2. Nech náhodná premenná X má hustotu $f(x) = \frac{c}{1+x^2}$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$, kde c je konštanta. Nájdite hodnotu c . Určte distribučnú funkciu náhodnej premennej X . Nájdite hustotu náhodnej premennej $Y = 1/X$. (Predpokladáme, že $\{\omega | X(\omega) = 0\} = \emptyset$, t.j. že X nikdy nie je rovné 0.)

Príklad 8.3. Nech $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, kde $\lambda > 0$. Ukážte, že náhodná premenná $\lfloor X \rfloor$ (dolná celá časť X) má geometrické rozdelenie.

Príklady na precvičenie

Príklad 8.4. Nech X je náhodná premenná a nech pre akékoľvek $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, platí $P[X = a] = 0$ a $P[X \in (a, b)] > 0$. Potom distribučná funkcia F náhodnej premennej X je bijektívne zobrazenie z $\mathbb{R}$ na interval $(0, 1)$. Dokážte!

Príklad 8.5. Nech $a, b \in \mathbb{R}$, pričom $a > 1, b > 0$. Náhodná premenná X má distribučnú funkciu $F(x) = 0$ pre $x \leq b$ a $F(x) = 1 - (b/x)^a$ pre $x > b$. Nájdite hustotu a strednú hodnotu náhodnej premennej X . **Riešenie:** Hustota je $f(x) = 0$ pre $x \leq b$ a $f(x) = ab^a x^{-a-1}$ pre $x > b$. $E(X) = ab/(a-1)$.

Príklad 8.6. Nech $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, kde $\lambda > 0$. Nájdite distribučnú funkciu, hustotu a strednú hodnotu náhodnej premennej $Y = e^{-X}$. **Riešenie:** $F_Y(y) = 0$ pre $y \leq 0$, $F_Y(y) = y^\lambda$ pre $y \in (0, 1)$, $F_Y(y) = 1$ pre $y \geq 1$. $f_Y(y) = \lambda y^{\lambda-1}$ pre $y \in (0, 1)$, $f_Y(y) = 0$ inde. $E(Y) = \frac{\lambda}{\lambda+1}$.

Príklad 8.7. Nech $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, kde $\lambda > 0$. Presvedčte sa, že pre každé $0 < a < b$ platí $P(X > b | X > a) = P(X > b - a)$.

Príklad 8.8. Nech X je spojitá náhodná premenná s hustotou $f(x) = e^{-|x|}/2$ pre všetky $x \in \mathbb{R}$. Vypočítajte distribučnú funkciu a disperziu náhodnej premennej X . Nájdite hustotu náhodnej premennej $Y = X^2$. **Riešenie:** $D(X) = 2$. Pre $y > 0$ je $f_Y(y) = e^{-\sqrt{y}}/(2\sqrt{y})$ a pre $y \leq 0$ je $f_Y(y) = 0$.

Príklad 8.9. Bod B volíme rovnomerne náhodne na štvrtkružnici, ktorú získame ako prienik jednotkovej kružnice s prvým kvadrantom. (Presnejšie: B má súradnice $(\cos(\phi), \sin(\phi))$, kde ϕ má rovnomerné rozdelenie na $(0, \pi/2)$). Nech S je obsah trojuholníka s vrcholmi $(-1, 0)$, $(1, 0)$, B . Určte distribučnú funkciu F_S , hustotu f_S a $E(S)$. **Riešenie:** $F_S(s) = \frac{2}{\pi} \arcsin(s)$, $s \in (0, 1)$, $F_S(s) = 1$, $s \geq 1$, $F_S(s) = 0$, $s \leq 0$; $f_S(s) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-s^2}}$, $s \in (0, 1)$, $f_S(s) = 0$ inak; $E(S) = 2/\pi$.

Príklad 8.10. Delo na rovine vystrelilo projektil pod uhlom 45° voči zemi. Nevieme presnú počiatočnú rýchlosť projektilu V , iba vieme, že V má rovnomerné rozdelenie na intervale $(24, 26)m \cdot s^{-1}$. Zanedbáme odpor vzduchu a uvažujeme gravitačné zrýchlenie $10m \cdot s^{-2}$. Dá sa ukázať, že v takom prípade je dolet strely $X = V^2/10$. **a)** Aký je očakávaný dolet strely (t.j. určte $E(X)$)? **b)** Vypočítajte hustotu f_X náhodnej premennej X . **Riešenie:** a) $E(X) = 1876/30$, b) $f_X(x) = \frac{\sqrt{10}}{4\sqrt{x}}$, $x \in (24^2/10, 26^2/10)$, $f_X(x) = 0$ inak.