9 Normálne rozdelenie

Príklad 9.1. Nech náhodná premenná X má normalizované normálne rozdelenie. Nájdite hustotu náhodných premenných **a)** e^X; **b)** X^2.

Príklad 9.2. Nech náhodná premenná X má rozdelenie $N(\mu, \sigma^2)$ a nech $a < b$. Vyjadrite pomocou distribučnej funkcie Φ rozdelenia $N(0,1)$ hodnotu $P[X \in (a,b)]$. Predpokladajme, že $X \sim N(100, 225)$. Vyčíslite $P[X \in (85, 115)]$.

Príklad 9.3. Rozmer vyrábanej súčiastky má približne normálne rozdelenie so strednou hodnotou $\mu = 1000$ mm. Výrobok považujeme za dobrý, ak sa jeho rozmer nelíši od 1000 mm o viac ako 1 mm. Aká musí byť disperzia rozmeru súčiastok, aby pomer nepodarkov neprekračoval 1 percento? Výsledok vyjadrite pomocou Φ^{-1} - inverznej funkcie k distribučnej funkcii rozdelenia $N(0,1)$. (Φ^{-1} sa nazýva kvantilová funkcia rozdelenia $N(0,1)$.)

Príklad 9.4. Pomocou aproximácie binomického rozdelenia normálnym a tabuliek funkcie Φ približne vyčíslite pravdepodobnosť, že po 10000 hrách so stávkou 1 dolár na červenú alebo čiernu farbu v rulete bude kasíno ziskové. Vieme, že pravdepodobnosť výhry pri stávke na ktorúkoľvek farbu je 18/37, pretože 1/37 je pravdepodobnosť padnutia (zelenej) nuly. Pri výhre dostáva hráč naspäť vsadený dolár plus jeden dolár výhry, pri prehre hráč prehráva vsadený dolár.

Príklady na precvičenie

Príklad 9.5. Nech náhodná premenná X má normalizované normálne rozdelenie. Nájdite hustotu náhodných premenných **a)** $|X|$; **b)** $\sqrt{|X|}$. ***Riešenie:*** a) $(2/\sqrt{2\pi})e^{-y^2/2}$ pre $y > 0$, 0 inde; b) $(4y/\sqrt{2\pi})e^{-y^4/2}$ pre $y > 0$, 0 inde.

Príklad 9.6. Nech $X \sim N(0, \sigma^2)$. Určte nasledovné stredné hodnoty: **a)** $E(X^2)$; **b)** $E(|X|)$; **c)** pre prípad $\sigma^2 = 1$ určte $E(e^X)$. (Pomôcka: Na výpočet $E(e^X)$ je možné použiť rovnosť $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ pre hustotu f rozdelenia $N(1,1)$.) ***Riešenie:*** a) σ^2, b)$\sqrt{\frac{2\sigma^2}{\pi}}$ c) $\sqrt{e}$.

Príklad 9.7. Hádžeme 200 krát šípkou na terč, pričom pravdepodobnosť zásahu je v každom hode $0,6$. Pomocou aproximácie binomického rozdelenia normálnym približne určte pravdepodobnosť, že terč zasiahneme menej ako 105-krát. ***Riešenie:*** $\Phi(-2,165) \approx 0,015$ (skutočná hodnota je približne $0,013$).

Príklad 9.8. Predpokladajme, že spomedzi všetkých obyvateľov Slovenska by volilo istú politickú stranu 12 percent ľudí. Pomocou aproximácie binomického rozdelenia normálnym odhadnite pravdepodobnosť, že v náhodne zvolenej vzorke

1000 respondentov bude voličov tejto strany aspoň **a)** 13; **b)** 14; **c)** 15 percent. ***Riešenie:*** Približne $0,165$; $0,026$ a $0,002$.

Príklad 9.9. Náhodné premenné $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots, X_{4000}, Y_{4000}$ sú nezávislé, všetky s rovnomerným rozdelením na intervale $(-1, 1)$. Pomocou aproximácie binomického rozdelenia normálnym odhadnite pravdepodobnosť, že menej ako 3000 bodov $(X_i, Y_i)^T$ padne do kruhu $S_2(1) = \left\{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\right\}$. Výsledok zapíšte pomocou Φ - distribučnej funkcie rozdelenia $N(0, 1)$. ***Riešenie:***$\phi(\frac{3000-1000\pi}{\pi\sqrt{750}})$.

Príklad 9.10. Politická strana chce zistiť, koľko percent má voličov. Z tohoto dôvodu si vyberie nezávisle náhodne n respondentov, ktorí zodpovedajú otázku, či by túto stranu volili, alebo nie. Pomocou aproximácie binomického rozdelenia normálnym navrhnite aké musí byť minimálne n, aby sa s pravdepodobnosťou aspoň 99 percent takto zistené percentuálne preferencie líšili od skutočného zastúpenia voličov danej strany v populácii o menej ako 1 percento. (A to pre akúkoľvek skutočnú hodnotu p pomeru voličov danej strany v populácii.) ***Riešenie:*** Keďže $p(1-p) \leq 1/4$ dostaneme $n \geq 16588$.