

## 0 Poznámky k poznámkam

- Poznámky skoro iste nebudú ku každej prednáške.
- Ak by aj náhodou boli, aj tak odporúčam písať si vlastné poznámky - človek si tým viac zapamätá (a vie to lepšie konfrontovať s tým, čo uvidí tu).
- Ak je niečo sivou farbou, berte to ako nejakú drobnú poznámku, prípadne snahu niečo viac rozviesť/dovysvetliť.
- Ak ste našli nejakú chybu (či už matematickú, gramatickú alebo štylistickú), prípadne máte pocit, že niečo nie je dobre/jasne vysvetlené, dajte mi, prosím, vedieť prostredníctvom formulára na stránke <https://forms.gle/nTox8o6J5FXj74bj9>.

## 1 Predikcie

Uvažujeme časový rad  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , pričom chceme nájsť nejaký prediktor pre náhodnú premennú  $X_t$  pomocou náhodného vektora  $(X_r, X_{r+1}, \dots, X_s)^T$ , kde  $r \leq s < t$  alebo  $t < r \leq s$ . Väčšinou máme situáciu, že poznáme  $X_1, \dots, X_n$  (resp. ich realizáciu) a na základe toho cheme niečo povedať o „budúcnosti“, t.j. o náhodných premenných  $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$ , prípadne o „minulosti“, t.j. náhodných premenných  $X_0, X_{-1}, X_{-2}, \dots$ . Rozumným nápadom na dobrý prediktor by mohla byť taká funkcia  $f(X_r, \dots, X_s)$ , pre ktorú by platilo, že

$$f \in \arg \min_f E((X_t - f(X_r, \dots, X_s))^2), \quad (1.1)$$

inými slovami taká funkcia, že stredná kvadratická chyba prediktora je najmenšia možná. My sa zameriame iba na prípady, kedy je funkcia  $f$  lineárna, t.j.  $f(X_r, \dots, X_s)$  vieme písať ako

$$f(X_r, \dots, X_s) = \alpha + \sum_{k=0}^{s-r} \beta_k X_{s-k}. \quad (1.2)$$

Dôvody, prečo sa obmedziť iba na lineárne funkcie sú (aspoň) dva:

1. Je to jednoduchšie - ak má funkcia  $f$  tvar ako v (1.2), tak nám stačí nájsť neznáme parametre  $\alpha$  a  $\beta_k$  ( $k = 0, \dots, s - r$ ). V úplne všeobecnom prípade by sme museli prehľadávať priestor všetkých možných funkcií, čo nemusí byť zrovna najzábavnejšia činnosť. (Dalo by sa samozrejme obmedziť na nejakú „väčšiu“ triedu funkcií, ktorú vieme rozumne parametrizovať (napr. by sme mohli pridať aj druhé mocniny  $X_r, \dots, X_s$ ), ale väčšinou lineárne stačia, viď ďalší bod).
2. Dá sa ukázať, že ak je časový rad gaussovský (čo väčšinou dúfame, že je), tak funkcia spĺňajúca (1.1) je lineárna.

Funkciu, ktorá má tvar ako v (1.2) a zároveň spĺňa (1.1) nazývame **najlepší lineárny prediktor** (po anglicky „best linear predictor“ alebo skrátene **BLP**). Takýto prediktor (náhodnej premennej  $X_t$  pomocou náhodného vektora  $(X_r, \dots, X_s)^T$ ) budeme označovať  $\hat{X}_t^{r:s}$ .

Ak nemáme gaussovský časový rad, musíme sa zmieriť s tým, že môže existovať aj niečo lepšie (v zmysle (1.1)) ako BLP.

## Odhady parametrov

Podme sa teraz pozrieť ako vyzerá BLP v stacionárnom časovom rade (pre jednoduchosť budeme predpokladať, že  $E(X_u) = 0$  pre každé  $u$ ). Aby sme našli vhodné  $\alpha, \beta_0, \dots, \beta_{s-r}$ , položíme

$$\begin{aligned} g(\alpha, \beta_0, \dots, \beta_{s-r}) &= E \left( \left( X_t - \alpha - \sum_{k=0}^{s-r} \beta_k X_{s-k} \right)^2 \right) = \\ &= (E(X_t^2)) - 2E \left( X_t \left( \alpha + \sum_{k=0}^{s-r} \beta_k X_{s-k} \right) \right) + E \left( \left( \alpha + \sum_{k=0}^{s-r} \beta_k X_{s-k} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (1.3)$$

a parciálne derivácie položíme rovné 0. (Z predpisu sa dá tušiť, že funkcia  $g$  bude „paraboloidná“, čiže uveríme, že týmto naozaj dostaneme minimum.)

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_{s-r}) = -2E(X_t) + E \left( 2 \left( \hat{\alpha} + \sum_{k=0}^{s-r} \hat{\beta}_k X_{s-k} \right) \right) = 0, \quad (1.4)$$

z čoho po úprave dostaneme

$$E(X_t) = E \left( \hat{\alpha} + \sum_{k=0}^{s-r} \hat{\beta}_k X_{s-k} \right). \quad (1.5)$$

Keďže sme predpokladali, že  $E(X_u) = 0$  pre každé  $u$ , dostávame

$$0 = E(X_t) = \hat{\alpha} + \sum_{k=0}^{s-r} \hat{\beta}_k E(X_{s-k}) = \hat{\alpha}. \quad (1.6)$$

Ak by sme aj nemali predpoklad, že stredná hodnota stacionárneho časového je nula, z (1.5) vždy dostávame (rozumnú) podmienku, že  $E(X_t) = E(\hat{X}_t^{s:r})$ , pretože  $\hat{\alpha} + \sum_{k=0}^{s-r} \hat{\beta}_k X_{s-k} = \hat{X}_t^{s:r}$ . Pre  $i = 0, 1, \dots, s-r$  máme

$$\frac{\partial g}{\partial \beta_i}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_{s-r}) = -2E(X_t X_{s-i}) + E \left( 2 \left( \hat{\alpha} + \sum_{k=0}^{s-r} \hat{\beta}_k X_{s-k} \right) X_{s-i} \right) = 0, \quad (1.7)$$

po úprave (keďže  $\hat{\alpha} = 0$ ) dostávame

$$E(X_t X_{s-i}) = \sum_{k=0}^{s-r} \hat{\beta}_k E(X_{s-k} X_{s-i}) \quad (1.8)$$

$$\gamma(t - (s - i)) = \sum_{k=0}^{s-r} \hat{\beta}_k \gamma(s - k - (s - i)) \quad (1.9)$$

$$\sum_{k=0}^{s-r} \hat{\beta}_k \gamma(i - k) = \gamma(t - s + i). \quad (1.10)$$

Ak by sme si tieto rovnice rozpísali pre jednotlivé  $i = 0, 1, \dots, s-r$ , v maticovom zápise dostaneme, že  $\hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_{s-r}$  musí spĺňať

$$\begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \gamma(2) & \dots & \gamma(s-r) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \gamma(1) & \dots & \gamma(s-r-1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma(s-r) & \gamma(s-r-1) & \dots & \dots & \gamma(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_{s-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(t-s) \\ \gamma(t-s+1) \\ \vdots \\ \gamma(t-r) \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Ak poznáme konkrétny model pre časový rad  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , tak vieme aj presné hodnoty kovariančnej funkcie  $\gamma$  a teda vieme presne vypočítať  $\hat{\beta}_i$  (pre  $i = 0, \dots, s-r$ ). Ak aj model nepoznáme, z dát vieme odhadnúť  $\hat{\gamma}(0), \dots, \hat{\gamma}(s-r)$  a z toho dostať rozumný odhad pre neznáme  $\beta_0, \dots, \beta_{s-r}$ .

## Intervalový odhad

V prípade, že máme gaussovský proces, náhodná premenná  $(X_t - \hat{X}_t^{r:s})$  má normálne rozdelenie so strednou hodnotou rovnou 0 a disperziou  $(\sigma_t^{r:s})^2 \equiv E((X_t - \hat{X}_t^{r:s})^2)$  - ak by sme si tento výraz rozpísali, dostali by sme nejaký dlhý výraz obsahujúci iba  $\beta_i$  a  $\gamma(i)$  ( $i = 0, \dots, s - r$ ), čiže by sme ho vedeli spočítať/odhadnúť. Máme teda  $(X_t - \hat{X}_t^{r:s}) \sim N(0, (\sigma_t^{r:s})^2)$ , teda

$$P\left(\frac{X_t - \hat{X}_t^{r:s}}{\sigma_t^{r:s}} \in (-u_{\frac{\alpha}{2}}, u_{\frac{\alpha}{2}})\right) = 1 - \alpha, \quad (1.12)$$

kde  $u_{\frac{\alpha}{2}}$  je  $\frac{\alpha}{2}$  kritická hodnota štandardizovaného normálneho rozdelenia. Po úprave dostávame

$$P(X_t \in (\hat{X}_t^{r:s} - u_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_t^{r:s}, \hat{X}_t^{r:s} + u_{\frac{\alpha}{2}}\sigma_t^{r:s})) = 1 - \alpha, \quad (1.13)$$

teda  $(1 - \alpha)100\%$  interval spoľahlivosti pre  $X_t$ .

## Predikcie v AR modeloch

Predpokladajme, že  $\{X_t\}$  je stacionárny AR( $p$ ), t.j. platí

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + W_t, \quad (1.14)$$

kde  $W_t \sim WN(0, \sigma^2)$  a  $W_t$  a  $X_s$  sú nezávislé pre  $s < t$ . Predpokladajme, že chceme nájsť  $\hat{X}_t^{t-p:t-1}$ , t.j. pomocou  $(X_{t-p}, \dots, X_{t-1})$  nájsť najlepší lineárny prediktor náhodnej premennej  $X_t$ . Intuitívne sa „núka“ predikcia

$$\hat{X}_t^{t-p:t-1} = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p}. \quad (1.15)$$

Jedna možnosť, ako to overiť, je nájsť riešenie sústavy rovníc (1.11) - ak nám vyjde, že  $\hat{\beta}_0 = \phi_1, \dots, \hat{\beta}_{p-1} = \phi_p$ , tak naša intuícia je správna. (Miesto riešenia sústavy si v skutočnosti stačí v zošite nalistovať Yule-Walker-ove rovnice.) Druhá možnosť je pozrieť sa pozorne ešte raz na výraz (1.7) - s využitím toho, že  $\hat{X}_t^{s:r} = \hat{\alpha} + \sum_{k=0}^{s-r} \hat{\beta}_k X_{s-k}$  dostaneme po úprave výrazu (1.7)

$$E((\hat{X}_t^{s:r} - X_t)X_{s-i}) = 0 \quad (1.16)$$

pre každé  $i = 0, \dots, s - r$ , resp.

$$E((\hat{X}_t^{s:r} - X_t)X_u) = 0 \quad (1.17)$$

pre každé  $u = r, \dots, s$  alebo inými slovami  $\hat{X}_t^{s:r} - X_t$  („chyba odhadu“) je nekorelovaná s  $X_r, \dots, X_s$  (premennými, ktorými sme odhadovali). Výraz (1.17) na nekorelovanosť stačí, pretože

$$Cov(\hat{X}_t^{s:r} - X_t, X_u) = E((\hat{X}_t^{s:r} - X_t)X_u) - E(\hat{X}_t^{s:r} - X_t)E(X_u),$$

kde  $E(\hat{X}_t^{s:r} - X_t)$  je vždy nulové. To je jediná podmienka, z ktorej boli odvádzané rovnice pre  $\hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_{s-r}$ , takže ak ju nejaký lineárny prediktor spĺňa, tak má právo volať sa BLP.

Zo (1.14) a (1.15) máme, že  $\hat{X}_t^{s:r} - X_t = -W_t$ , čo je podľa definície AR procesu nekorelovaná (dokonca nezávislá) s  $X_{t-p}, \dots, X_{t-1}$ , takže výraz v (1.15) je naozaj BLP. Z rovnakého dôvodu aj

$$\hat{X}_t^{1:t-1} = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p}, \quad (1.18)$$

teda aj kebyže máme k dispozícii aj „dávnejšie“ hodnoty časového radu na najlepší lineárny odhad nám stačí iba  $X_{t-p}, \dots, X_{t-1}$  - predchádzajúce hodnoty tento odhad nevylepší.

Ak by sme chceli predikciu aj „ďalej“ ako jeden krok, napr.  $\hat{X}_{t+1}^{t-p:t-1}$ , tak rozumný kandidát by mohol byť

$$\hat{X}_{t+1}^{t-p:t-1} = \phi_1 \hat{X}_t^{t-p:t-1} + \phi_2 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p+1} = \quad (1.19)$$

$$= \phi_1(\phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p}) + \phi_2 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p+1}. \quad (1.20)$$

Po roznásobení by sme dostali nejakú lineárnu kombináciu  $X_{t-p}, \dots, X_{t-1}$ , stačí teda overiť, že  $\hat{X}_{t+1}^{t-p:t-1} - X_{t+1}$  je nekorelované s  $X_{t-p}, \dots, X_{t-1}$ . Zo (1.14) a (1.15) máme, že  $\hat{X}_t^{t-p:t-1} = X_t - W_t$  - po dosadení do (1.19) dostávame

$$\begin{aligned}\hat{X}_{t+1}^{t-p:t-1} &= \phi_1(X_t - W_t) + \phi_2 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p+1} = \\ &= \phi_1 X_t + \phi_2 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p+1} - \phi_1 W_t = \\ &= X_{t+1} - W_{t+1} - \phi_1 W_t,\end{aligned}$$

teda  $\hat{X}_{t+1}^{t-p:t-1} - X_{t+1} = -W_{t+1} - \phi_1 W_t$ , čo je naozaj nekorelované s  $X_{t-p}, \dots, X_{t-1}$ .

Dá sa ukázať, že rovnako intuitívne by fungovali aj ďalšie predikcie (pre viac „krokov“ dopredu).

## Predikcie v ARMA modeloch

Pre jednoduchosť budeme predpokladať, že  $\{X_t\}$  je stacionárny, invertovateľný ARMA(1,1), t.j. platí

$$X_t = \phi X_{t-1} + W_t + \theta W_{t-1}, \quad (1.21)$$

kde  $W_t \sim WN(0, \sigma^2)$  a  $W_t$  a  $X_s$  sú nezávislé pre  $s < t$  (pre ARMA( $p, q$ ) by sa postupovalo analogicky). V takomto prípade sa úplne intuitívne postupovať nedá, pretože hodnotu  $W_{t-1}$  nepoznáme (hoci už „nastala“). Jedna z možností ako postupovať, je vyriešiť sústavu (1.11) - v praxi nevychádza nič pekné, ale existujú na to (relatívne šikovné) algoritmy. Ďalšia možnosť je zapísať  $\{X_t\}$  ako AR( $\infty$ ) (to sa dá, keďže je invertovateľný), t.j.

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{t-j} + W_t. \quad (1.22)$$

Ak by sme poznali celú minulosť, t.j. náhodné premenné

$$X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_1, X_0, X_{-1}, \dots,$$

najlepší lineárny prediktor by bol

$$\hat{X}_t^{-\infty:t-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j X_{t-j}. \quad (1.23)$$

V praxi nemáme šancu poznať celú minulosť, avšak platí, že  $\pi_j \rightarrow 0$  pre  $j \rightarrow \infty$  (dostatočne rýchlo), takže pre dostatočne veľké  $t$  sa dá použiť aproximácia

$$X_t \approx \sum_{j=1}^{t-1} \pi_j X_{t-j} + W_t \quad (1.24)$$

a tzv. „useknutý“ (truncated) prediktor

$$\tilde{X}_t^{1:t-1} = \sum_{j=1}^{t-1} \pi_j X_{t-j}. \quad (1.25)$$

Tento síce nie je BLP (preto je nad  $X_t^{1:t-1}$  vlnovka namiesto striedky), ale nemá k nemu ďaleko.

**Príklad.** V ARMA(1,1) chceme nájsť  $\tilde{X}_4^{1:3}$ . Z (1.21) máme, že platí

$$W_t = X_t - \phi X_{t-1} - \theta W_{t-1}, \quad (1.26)$$

teda  $X_4$  môžeme rozpísať ako

$$\begin{aligned}
X_4 &= \phi X_3 + W_4 + \theta W_3 = \phi X_3 + W_4 + \theta(X_3 - \phi X_2 - \theta W_2) = \\
&= W_4 + (\phi + \theta)X_3 - \phi\theta X_2 - \theta^2 W_2 = \\
&= W_4 + (\phi + \theta)X_3 - \phi\theta X_2 - \theta^2(X_2 - \phi X_1 - \theta W_1) = \\
&= W_4 + (\phi + \theta)X_3 - \theta(\phi + \theta)X_2 + \theta^2\phi X_1 + \theta^3 W_1 = \\
&= W_4 + (\phi + \theta)X_3 - \theta(\phi + \theta)X_2 + \theta^2\phi X_1 + \theta^3(X_1 - \phi X_0 - \theta W_0) = \\
&= W_4 + \sum_{j=1}^3 (-\theta)^{j-1}(\phi + \theta)X_{4-j} - \theta^3\phi X_0 - \theta^4 W_0.
\end{aligned}$$

Analogicky by sme mohli pokračovať, až kým by sme sa nedopracovali k  $AR(\infty)$  reprezentácii, avšak už v tomto kroku vidno, že posledné dva členy už nijako nevieme vyjadriť pomocou  $X_1, X_2$  a  $X_3$ , a teda

$$\tilde{X}_4^{1:3} = \sum_{j=1}^3 (-\theta)^{j-1}(\phi + \theta)X_{4-j}. \quad (1.27)$$

### „Predikovanie” minulosti<sup>1</sup>

Predpokladajme situáciu, že máme k dispozícii náhodný vektor  $(X_1, \dots, X_n)^T$  a zaujíma nás náhodná premenná  $X_0$  - v našom označení  $r = 1, s = n, t = 0$  a zaujíma nás  $\hat{X}_0^{1:n}$ . Z toho, čo už bolo povedané vieme, že

$$\hat{X}_0^{1:n} = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k X_{n-k}, \quad (1.28)$$

kde  $\beta_0, \dots, \beta_{n-1}$  spĺňa sústavu (viď 1.11)

$$\begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \gamma(2) & \dots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \gamma(1) & \dots & \gamma(n-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-1) & \dots & \dots & \gamma(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(n) \\ \gamma(n-1) \\ \vdots \\ \gamma(1) \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Na chvíľu odbočme - ak by nás namiesto  $X_0$  zaujímal  $X_{n+1}$ , tak máme

$$\hat{X}_{n+1}^{1:n} = \sum_{k=0}^{n-1} \beta'_k X_{n-k}, \quad (1.30)$$

kde  $\beta'_0, \dots, \beta'_{n-1}$  spĺňa

$$\begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \gamma(2) & \dots & \gamma(n-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \gamma(1) & \dots & \gamma(n-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma(n-1) & \gamma(n-1) & \dots & \dots & \gamma(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta'_0 \\ \beta'_1 \\ \vdots \\ \beta'_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(1) \\ \gamma(2) \\ \vdots \\ \gamma(n) \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

Ak sa teraz pozorne pozrieme na sústavy (1.29) a (1.31), tak zbadáme, že sú rovnaké, len rovnice a neznáme bety idú v opačnom poradí (prvá rovnica zo sústavy (1.29) je taká istá, ako posledná rovnica sústavy (1.31), druhá rovnaká ako predposledná, atď.). Ak teda nájdeme nejaké riešenie  $(\hat{\beta}_0, \dots, \hat{\beta}_{n-1})$  sústavy (1.31), tak potom  $(\hat{\beta}_{n-1}, \dots, \hat{\beta}_0)$  rieši sústavu (1.29). Inými slovami, ak

$$\hat{\beta}_0 X_n + \hat{\beta}_1 X_{n-1} + \dots + \hat{\beta}_{n-1} X_1 \quad (1.32)$$

<sup>1</sup>V angličtine sa dá stretnúť s výrazmi „Backward prediction” alebo „Backcasting” (pri normálnom predikovaní sa bežne stretneme s výrazom „Forecasting”).

je BLP pre  $X_{n+1}$ , tak

$$\widehat{\beta}_0 X_1 + \widehat{\beta}_1 X_2 + \dots + \widehat{\beta}_{n-1} X_{n-1} \quad (1.33)$$

je BLP pre  $X_0$ .

Analogicky by sme dostali, že BLP pre  $X_{-1}$  je veľmi podobný BLP pre  $X_{n+2}$ , atď. V praxi to znamená, že ak chceme „predikciu“ pre  $X_0, X_{-1}, X_{-2}, \dots$ , tak

1. otočíme dáta (namiesto  $(x_1, \dots, x_n)$  zoberieme  $(x_n, \dots, x_1)$ ),
2. spravíme „normálnu“ predikciu (do budúcnosti),
3. dáta aj s predikciami otočíme naspäť.

Ak to chceme spraviť v R-ku a aj to vykresliť s intervalovými odhadmi, dá sa to spraviť nasledovne. (Budeme predpokladať, že máme sto dát v premennej `data`, o ktorých sme zistili, že sa správajú podľa modelu ARIMA(2,1,0) a chceme spraviť predikciu na 20 krokov dozadu.)

```
library(forecast) #treba túto knižnicu
#otočenie dát
otocene <- rev(data)
#predikcia 20 krokov dopredu pri modeli ARIMA(2,1,0)
predikcie <- forecast(arima(otocene, order=c(2,1,0)), 20)
#v premennej predikcie je teraz uložené vseličo
#(hodnoty časoveho radu "otocene", samotné predikcie a aj predikčné intervaly)
#všetko to musíme pootáčať naspäť
predikcie$mean <- ts(rev(predikcie$mean),end=0)
#otočenie predikcií a ich umiestnenie pred samotný časový rad (preto end=0)
#(ak by sme mali nejaké konkrétne roky (napr. začiatok v 1991),
#tak nastavíme end=1990)
predikcie$upper <- predikcie$upper[20:1,]
predikcie$lower <- predikcie$lower[20:1,]
predikcie$x <- data
# v predikcie$x je boli schovane dáta "otocene", my tam chceme dáta "data"
plot(predikcie, xlim=c(-19,100)) #vykreslenie
```

**Príklad.** Uvažujme AR(1) proces, t.j.  $X_t = \phi X_{t-1} + W_t$ . Ak máme k dispozícii  $X_1$ , tak intuitívny odhad pre  $X_2$  by bol  $\phi X_1$  (a vyššie sme ukázali, že to naozaj je BLP). Čo už nie je úplne intuitívne, tak BLP pre  $X_0$  je tiež  $\phi X_1$  (intuitívne by sme možno skôr čakali niečo typu  $\phi^{-1} X_1$ ). Trochu iný pohľad na vec - uvažujme  $W_t \sim \text{iid } N(0, \sigma^2)$  (normálny biely šum) a  $V_t \sim \text{iid } N(0, \sigma^2)$  (tiež normálny biely šum) a modely  $X_t = \phi X_{t-1} + W_t$  (klasický AR(1)) a  $Y_t = \phi Y_{t+1} + V_t$  (skoro klasický AR(1)), kde  $|\phi| < 1$ . Ľahko si vieme tieto modely rozpísať ako lineárne procesy

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j W_{t-j},$$
$$Y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j V_{t+j},$$

čiže náhodné premenné  $X_t$  a  $Y_t$  sú rovnako rozdelené. Podobne vieme zobrať aj dvojice

$$(X_t, X_{t+1}) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j (W_{t-j}, W_{t+1-j}),$$
$$(Y_t, Y_{t+1}) = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j (V_{t+j}, V_{t+1+j}),$$

čiže aj  $(X_t, X_{t+1})$  a  $(Y_t, Y_{t+1})$  sú rovnako rozdelené. Analogicky by sme takýto postup vedeli rozšíriť na celý časový rad, čiže  $\{X_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$  má rovnaké rozdelenie ako  $\{Y_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ . Z tohto pohľadu - ak máme dané  $Y_1$ , tak intuitívny odhad pre  $Y_0$  je  $\phi Y_1$  a keďže časové rady  $\{X_t\}$  a  $\{Y_t\}$  sú rovnako rozdelené, tak aj fakt, že  $\widehat{X}_0^{1:1} = \phi X_1$  môže pôsobiť zmysluplnejšie.

Ak by sme mali AR(2) proces  $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + W_t$ , tak z predchádzajúceho platí  $\widehat{X}_3^{1:2} = \phi_1 X_2 + \phi_2 X_1$  a  $\widehat{X}_0^{1:2} = \phi_1 X_1 + \phi_2 X_2$ .

## Súvis s parciálnou autokorelačnou funkciou

V zimnom semestri sme často pracovali s parciálnou autokorelačnou funkciou (PACF) - jej hodnota v bode  $k$  vyjadrovala akýsi odhad posledného parametra ( $\phi_{kk}$ ) za predpokladu, že dáta sa správajú podľa modelu  $X_t = \phi_{k1} X_{t-1} + \dots + \phi_{kk} X_{t-k} + W_t$ , t.j. podľa AR( $k$ ) modelu (napr. PACF(1) je odhad  $\phi_{11}$  ak predpokladáme, že  $X_t = \phi_{11} X_{t-1} + W_t$ , PACF(2) je odhad  $\phi_{22}$  ak predpokladáme model  $X_t = \phi_{21} X_{t-1} + \phi_{22} X_{t-2} + W_t$ , atď.). V AR( $p$ ) modeli potom prirodzene platilo, že hodnoty PACF( $p+1$ ), PACF( $p+2$ ), ... sú nulové, pretože  $X_{t-(p+1)}, X_{t-(p+2)}, \dots$  nijako neovplyvujú na  $X_t$  (teda koeficient pri nich je 0). Dá sa ukázať, že platí aj rovnosť

$$\text{PACF}(k) = \rho \left( X_0 - \widehat{X}_0^{1:(k-1)}, X_k - \widehat{X}_k^{1:(k-1)} \right), \quad (1.34)$$

čiže je to korelácia medzi  $X_0$  a  $X_k$  „očistenými“ od lineárneho vplyvu náhodných premenných  $X_1, \dots, X_{k-1}$ . V AR( $p$ ) modeli pre  $k > p$  platí  $X_k - \widehat{X}_k^{1:(k-1)} = W_k$  (viď vyššie), čiže

$$\rho \left( X_0 - \widehat{X}_0^{1:(k-1)}, X_k - \widehat{X}_k^{1:(k-1)} \right) = \rho(X_0 - \widehat{X}_0^{1:(k-1)}, W_k) = 0, \quad (1.35)$$

pretože  $W_k$  je nezávislé s  $X_0, X_1, \dots, X_{k-1}$ .

## 2 Odhady v ARMA modeloch

V tejto časti budeme uvažovať stacionárny, invertovateľný ARMA( $p, q$ ) proces  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  s nulovou strednou hodnotou<sup>2</sup>, t.j.

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + W_t + \theta_1 W_{t-1} + \dots + \theta_q W_{t-q}, \quad (2.1)$$

kde  $W_t \sim WN(0, \sigma^2)$  a  $W_t$  a  $X_s$  sú nezávislé pre  $s < t$ . Naším cieľom je nájsť vhodné odhady pre neznáme parametre  $\phi_1, \dots, \phi_p, \theta_1, \dots, \theta_q$  a  $\sigma^2$ . Uvedieme tri metódy.

### Momentová metóda

Ideou momentovej metódy je odhadnúť parametre na základe kovariančnej funkcie (resp. jej odhadu z dát).

**Príklad.** Uvažujme MA(1) proces, t.j.  $X_t = W_t + \theta W_{t-1}$ . Zo zimného semestra vieme, že pre kovariančnú funkciu platí  $\gamma(0) = (1 + \theta^2)\sigma^2$  a  $\gamma(1) = \theta\sigma^2$ . Z dát odhadneme  $\widehat{\gamma}(0)$  a  $\widehat{\gamma}(1)$  a pomocou nich vyjadríme  $\widehat{\theta}$  a  $\widehat{\sigma}^2$ . Po jednoduchých úpravách dostaneme

$$\widehat{\theta} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\widehat{\rho}^2(1)}}{2\widehat{\rho}(1)}, \quad (2.2)$$

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{\widehat{\gamma}(0)}{1 + \widehat{\theta}^2}, \quad (2.3)$$

kde  $\widehat{\rho}(1) = \frac{\widehat{\gamma}(1)}{\widehat{\gamma}(0)}$  je odhad autokorelačnej funkcie. Môžeme si všimnúť, že pod odmocninou v (2.2) môže výjsť záporné číslo (ak  $|\widehat{\rho}| > 0.5$ ) - vtedy takýto odhad samozrejme nie je vhodný (a je

<sup>2</sup>Ak by mal časový rad nenulovú strednú hodnotu  $\mu$ , môžeme ju v praxi odhadnúť priemerom a následne pracovať s dátami  $x_1 - \bar{x}, \dots, x_n - \bar{x}$  - o tých už je rozumné predpokladať, že majú nulovú strednú hodnotu.

potrebné keď tak použiť na odhad iné momenty (napr.  $\gamma(2)$  namiesto  $\gamma(1)$  a pod.), prípadne - ak na to nie sme odkázaní - momentovú metódu nepoužívať vôbec, keďže disperzia takýchto odhadov býva (oproti iným odhadom) dosť vysoká). Podobne by sme postupovali pri ľubovoľnom ARMA( $p, q$ ) modeli - napísali by sme si predpis pre  $\gamma(0), \dots, \gamma(p+q)$  (pomocou neznámych parametrov), z dát by sme odhadli  $\hat{\gamma}(0), \dots, \hat{\gamma}(p+q)$  a vyriešili by sme  $p+q+1$  rovníc o  $p+q+1$  neznámych. Ak by sa stalo, že takýto systém má viac riešení, zobrali by sme také  $\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_p, \hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_q$ , aby bola splnená podmienka stacionarity a invertovateľnosti.

## Regresia

V prípade, že máme AR( $p$ ) model  $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + W_t$ , na odhad parametrov môžeme použiť obyčajnú regresiu, t.j. ak máme k dispozícii  $(X_1, \dots, X_n)$ , tak platí

$$\begin{pmatrix} X_n \\ X_{n-1} \\ \vdots \\ X_{p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{n-1} & X_{n-2} & \dots & X_{n-p} \\ X_{n-2} & X_{n-3} & \dots & X_{n-p-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ X_p & X_{p-1} & \dots & X_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_n \\ W_{n-1} \\ \vdots \\ W_{p+1} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Ak maticu označíme  $\mathbb{X}$ , vektor parametrov označíme  $\phi$  a vektor na ľavej strane označíme  $Y$ , tak z teórie regresných modelov vieme, že odhad vektora  $\phi$  metódou najmenších štvorcov dostaneme ako

$$\hat{\phi} = (\mathbb{X}^T \mathbb{X})^{-1} \mathbb{X}^T Y \quad (2.5)$$

a odhad  $\sigma^2$  ako

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(Y - \mathbb{X}\hat{\phi})^T (Y - \mathbb{X}\hat{\phi})}{n - p}. \quad (2.6)$$

Takéto odhady sú celkom presné, ich nevýhodou je, že ich vieme aplikovať iba pri autoregresnom modeli.

## Metóda maximálnej vierohodnosti (MLE)

V tejto metóde potrebujeme predpoklad o normálnom rozdelenom bielom šume. V takom prípade má náhodný vektor  $(X_1, \dots, X_n)^T$  normálne rozdelenie so strednou hodnotou  $E(X_1, \dots, X_n) = (0, \dots, 0)$  a kovariančnou maticou

$$\text{Cov}(X_1, \dots, X_n) = \Gamma_n(\Phi, \Theta, \sigma^2), \quad (2.7)$$

kde  $\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_p)$ ,  $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_q)$  a  $ij$ -ty prvok matice  $\Gamma_n(\Phi, \Theta, \sigma^2)$  je

$$(\Gamma_n(\Phi, \Theta, \sigma^2))_{ij} = \gamma_{\Phi, \Theta, \sigma^2}(i - j), \quad (2.8)$$

kde  $\gamma_{\Phi, \Theta, \sigma^2}$  označuje autokovariančnú funkciu ARMA( $p, q$ ) procesu s parametrami  $\Phi, \Theta$  a  $\sigma^2$ . MLE odhad parametrov  $\Phi, \Theta, \sigma^2$  je potom také  $\hat{\Phi}, \hat{\Theta}, \hat{\sigma}^2$ , ktoré maximalizuje funkciu

$$L(\Phi, \Theta, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\Gamma_n(\Phi, \Theta, \sigma^2))}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(X_1, \dots, X_n)\Gamma_n^{-1}(\Phi, \Theta, \sigma^2)(X_1, \dots, X_n)^T\right\}. \quad (2.9)$$

Vidíme, že toto parciálnymi deriváciami úplne nepôjde (pri „ručnom počítaní“ by sme sa zrejme natrápili už aj s konštrukciou matice  $\Gamma$ ) - vo všeobecnosti to môže byť problematické aj pre počítač, často je nutné robiť nejaké aproximácie.

## Poznámky k jednotlivým metódam

- Ak máme k dispozícii počítač, najlepšie je zrejme používať MLE (často má menšiu disperziu).
- Pri veľkom množstve dát sa odhady jednotlivých metód začínajú podobať.
- Pri MLE, regresii a niektorých prípadoch momentovej metódy majú odhady (za istých predpokladov) asymptoticky normálne rozdelenie - vieme teda testovať (napríklad) významnosť jednotlivých parametrov.



### Odhadovanie rezíduí (realizácii bieleho šumu)

Pri diagnostike modelu spravidla ako prvé skúmame odhady  $\widehat{W}_t$  bieleho šumu  $W_t$  (normalitu, nekorelovanosť). Na ich výpočet v ARMA( $p, q$ ) modeli

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + W_t + \theta_1 W_{t-1} + \dots + \theta_q W_{t-q} \quad (2.10)$$

sa spravidla postupuje tak, že sa položí  $\widehat{W}_t \equiv 0$  pre  $t \leq p$  a pre  $t = p + 1, \dots, n$  sa  $W_t$  odhadne z (2.10), čiže

$$\widehat{W}_t \equiv X_t - \widehat{\phi}_1 X_{t-1} - \dots - \widehat{\phi}_p X_{t-p} - \widehat{\theta}_1 \widehat{W}_{t-1} - \dots - \widehat{\theta}_q \widehat{W}_{t-q}. \quad (2.11)$$

Niekedy sa položí  $X_t = W_t = 0$  pre  $t \leq 0$  a  $\widehat{W}_1, \dots, \widehat{W}_p$  sa tiež vypočíta pomocou (2.11). V praxi to za nás počíta R-ko - to používa na výpočet  $\widehat{W}_t$  trochu iné postupy, ale dostali by sme podobné výsledky.

### 3 ARCH a GARCH modely

Na ARMA modely sa môžeme pozerať aj ako na modely pre podmienenú strednú hodnotu - uvažujme napríklad AR(1) model s nulovou strednou hodnotou, t.j.

$$X_t = \phi X_{t-1} + W_t. \quad (3.1)$$

Z predchádzajúceho semestra vieme, že stredná hodnota takéhoto časového radu je nula. Ak už ale poznáme minulosť  $x_{t-1}, x_{t-2}, \dots$ , tak podmienená stredná hodnota  $X_t$  bude

$$\begin{aligned} E(X_t | X_{t-1} = x_{t-1}, X_{t-2} = x_{t-2}, \dots) &= E(\phi X_{t-1} + W_t | X_{t-1} = x_{t-1}, X_{t-2} = x_{t-2}, \dots) = \\ &= E(\phi X_{t-1} | X_{t-1} = x_{t-1}, X_{t-2} = x_{t-2}, \dots) + \\ &+ E(W_t | X_{t-1} = x_{t-1}, X_{t-2} = x_{t-2}, \dots) = \phi x_{t-1} \end{aligned}$$

(ak poznáme minulosť, tak  $X_{t-1}$  je konštanta, preto sa v prvom sčítanci môžeme zbaviť strednej hodnoty a o  $W_t$  v ARMA modeloch predpokladáme, že nezávisí od minulosti, takže druhý sčítanec sa zredukuje na  $E(W_t) = 0$ ). Vo všeobecnosti, ak máme ARMA model, tak členy (okrem  $W_t$ ) nám priamo určujú podmienenú strednú hodnotu v prípade, že poznáme minulosť. Na to v podstate tie modely máme - na základe minulosti/prítomnosti vieme určiť strednú hodnotu toho, čo bude v budúcnosti - samotná nepodmienená stredná hodnota je z definície konštantná, čo nám v princípe nepovie nič zaujímavé. Ďalej sa pozrime na podmienenú disperziu tohto modelu - platí

$$\begin{aligned} D(X_t | X_{t-1} = x_{t-1}, X_{t-2} = x_{t-2}, \dots) &= D(\phi X_{t-1} + W_t | X_{t-1} = x_{t-1}, X_{t-2} = x_{t-2}, \dots) = \\ &= D(\phi X_{t-1} | X_{t-1} = x_{t-1}, X_{t-2} = x_{t-2}, \dots) + \\ &+ D(W_t | X_{t-1} = x_{t-1}, X_{t-2} = x_{t-2}, \dots) = 0 + D(W_t) = \sigma^2 \end{aligned}$$

(opäť sme využili, že  $W_t$  nezávisí od minulosti (aj v pri rozpise disperzie súčtu na súčet disperzií) a to, že disperzia konštanty je 0). Podobne ak by sme zobrali ľubovoľný ARMA model, tak podmienená disperzia výjde konštantná (a rovná  $\sigma^2$ ). Prirodzeným rozšírením modelov pre časové rady by teda z tohto pohľadu mohlo byť modelovať (aj) podmienenú disperziu - na to slúžia práve ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity) a GARCH (Generalised ARCH) modely. Tieto môžu byť veľmi užitočné v prípade, kedy v dátach vidíme nejaké rozdiely vo výkyvoch - tie môžu byť modelovateľné práve pomocou týchto modelov. Hlavný rozdiel oproti „čistým“ ARMA modelom je, že  $X_s$  a  $W_t$  už nemusia byť (a nie sú) nezávislé pre  $s < t$ , stále ale ostanú nekorelované. Okrem toho už nebudeme predpokladať nezávislosť medzi jednotlivými  $W_t$ , ale iba nekorelovanosť a normalitu. K tomuto drobná poznámka - zrejme ste sa stretli s tým, že nekorelovanosť v normálnych rozdelených vektoroch implikuje nezávislosť, čo sa môže javiť ako rozpor s predchádzajúcim tvrdením. Rozpor tam, ale nie je, lebo toto platí iba v normálne rozdelených vektoroch - ak máme dve nekorelované náhodné premenné  $X, Y$ , tak stále môže platiť, že obidve majú normálne rozdelenie, ale napriek

tomu sú závislé (čo zároveň implikuje, že  $(X, Y)$  nie je normálne rozdelený náhodný vektor, napriek tomu, že jeho zložky sú).

Hlavné idey ukážeme na najjednoduchšom ARCH(1) modeli, komplikovanejšie modely potom budú fungovať veľmi podobne.

## ARCH(1)

V takomto prípade predpokladáme, že pre  $\{W_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  platí  $W_t = \sigma_t \varepsilon_t$ , kde  $\varepsilon_t \sim \text{iid } N(0, 1)$  a pre  $\sigma_t$  platí  $\sigma_t = \sqrt{\omega + \alpha_1 W_{t-1}^2}$ , resp.  $\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 W_{t-1}^2$ , čiže pre podmienené rozdelenie  $W_t|W_{t-1}$  platí

$$W_t|W_{t-1} \sim N(0, \omega + \alpha_1 W_{t-1}^2). \quad (3.2)$$

To má priamo dôsledok na podmienenú disperziu, nakoľko podmienená disperzia ARMA modelu nám vychádza v tvare  $D(W_t|\text{minulosť})$  (v predchádzajúcej časti sme mali síce za podmienkou iba  $X_{t-1}, X_{t-2}, \dots$ , avšak  $W_{t-1}$  sa pomocou nich dá vyjadriť - rovnakou technikou, ako keď sme riešili invertovateľnosť). Pre parametre  $\omega, \alpha_1$  tohto modelu musí platiť  $\omega, \alpha_1 > 0$  (modelujeme disperziu, takže by nebolo vhodné, aby nám mohlo výjsť záporné číslo) a  $\alpha_1 < 1$  (kvôli stacionarite, v tomto prípade aby nám „neuletela“ nepodmienená disperzia).

Teraz ukážeme, že takto definované  $\{W_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  je naozaj biely šum, čiže pre všetky  $t \in \mathbb{Z}$  platí  $E(W_t) = 0$ , nepodmienená disperzia  $D(W_t)$  je konštantná a pre ľubovoľné celé  $h > 0$  platí, že  $W_t$  a  $W_{t+h}$  sú nekorelované. Pre nepodmienenú strednú hodnotu  $W_t$  platí

$$E(W_t) = E(E(W_t|W_{t-1})) = E(0) = 0, \quad (3.3)$$

lebo  $E(W_t|W_{t-1}) = 0$  (viď (3.2)) a pre ľubovoľné náhodné premenné  $X, Y$  platí  $E(E(X|Y)) = E(X)$  (zrejme bolo na Teórii pravdepodobnosti). Pre nepodmienenú disperziu máme

$$D(W_t) = E(W_t^2) - E^2(W_t) = E(W_t^2) = E(\sigma_t^2 \varepsilon_t^2) \quad (3.4)$$

Dá sa ukázať, že toto je rovné  $\frac{\omega}{1-\alpha_1}$ . Aby sa nepovedalo, tak to aj ukážeme - je to viac-menej technická záležitosť, na skúšku to netreba vedieť. Rozpíšme si najprv

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \omega + \alpha_1 W_{t-1}^2 = \omega + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 (\omega + \alpha_1 W_{t-2}^2) = \omega + \omega \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_1^2 \varepsilon_{t-1}^2 W_{t-2}^2 = \\ &= \omega + \omega \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_1^2 \varepsilon_{t-1}^2 \sigma_{t-2}^2 \varepsilon_{t-2}^2 = \omega + \omega \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_1^2 \varepsilon_{t-1}^2 \varepsilon_{t-2}^2 (\omega + \alpha_1 W_{t-3}^2) = \\ &= \omega + \omega \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \omega \alpha_1^2 \varepsilon_{t-1}^2 \varepsilon_{t-2}^2 + \alpha_1^3 \varepsilon_{t-1}^2 \varepsilon_{t-2}^2 W_{t-3}^2. \end{aligned}$$

Takto by sme vedeli pokračovať ďalej, a keďže  $\alpha_1 < 1$ , tak posledný člen pôjde k 0, čiže vieme písať

$$\sigma_t^2 = \omega \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_1^k \prod_{j=1}^k \varepsilon_{t-j}^2 \right). \quad (3.5)$$

Na mieste je otázka, či je toto „slušná“ náhodná premenná, či nám nemôže uletieť do nekonečna (môže) a s akou pravdepodobnosťou sa to stane (ak nula, tak je to v poriadku). Na to stačí ukázať, že má konečnú strednú hodnotu a to nie je až taký problém, lebo z vety o monotónnej konvergencii (prírastky v sume sú vždy nezáporné) máme

$$E(\sigma_t^2) = E \left( \omega \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_1^k \prod_{j=1}^k \varepsilon_{t-j}^2 \right) \right) = \omega \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_1^k E \left( \prod_{j=1}^k \varepsilon_{t-j}^2 \right) \right), \quad (3.6)$$

a keďže  $\varepsilon_t$  sú nezávislé, tak stredná hodnota súčinu je súčin stredných hodnôt, čiže

$$E \left( \prod_{j=1}^k \varepsilon_{t-j}^2 \right) = \prod_{j=1}^k E(\varepsilon_{t-j}^2) = 1, \quad (3.7)$$

z čoho dostávame, že

$$E(\sigma_t^2) = \omega \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_1^k \right) = \omega \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_1^k = \frac{\omega}{1 - \alpha_1}. \quad (3.8)$$

Z predpisu (3.5) navyše vidíme, že  $\sigma_t^2$  je iba funkciou  $\varepsilon_{t-1}^2, \varepsilon_{t-2}^2, \dots$ , čiže  $\varepsilon_t^2$  a  $\sigma_t^2$  sú nezávislé, takže

$$D(W_t) = E(\sigma_t^2 \varepsilon_t^2) = E(\sigma_t^2) E(\varepsilon_t^2) = \frac{\omega}{1 - \alpha_1}. \quad (3.9)$$

Nakoniec chceme ukázať, že  $W_t$  a  $W_{t+h}$  sú nekorelované pre ľubovoľné celé  $h > 0$ . Podobnou technikou ako pri počítaní strednej hodnoty dostávame

$$\begin{aligned} \text{Cov}(W_t, W_{t+h}) &= E(W_t W_{t+h}) - E(W_t) E(W_{t+h}) = E(W_t W_{t+h}) = \\ &= E(E(W_t W_{t+h} | (W_{t+h-1}, W_{t+h-2}, \dots, W_t))) = \\ &= E(W_t E(W_{t+h} | (W_{t+h-1}, W_{t+h-2}, \dots, W_t))) = E(W_t \cdot 0) = 0. \end{aligned}$$

V odvodení sme využili vlastnosť podmienenej strednej hodnoty  $E(XY|Y) = YE(X|Y)$  a to, že ak je dané  $W_{t+h-1}$ , tak  $W_{t+h}$  závisí už len od neho bez ohľadu na predchádzajúce hodnoty  $W_{t+h-2}, W_{t+h-3}, \dots$  (po matematicky  $W_{t+h}|W_{t+h-1}, W_{t+h-2}, \dots = W_{t+h}|W_{t+h-1}$ ) a  $W_{t+h}|W_{t+h-1} \sim N(0, \dots)$ , čiže  $E(W_{t+h}|(W_{t+h-1}, W_{t+h-2}, \dots, W_t)) = E(W_{t+h}|W_{t+h-1}) = 0$ .

$W_t$  je teda naozaj biely šum a v praxi sa môže stať, že aj qq-plot sa „tvári“ normálne - na prvý pohľad teda nemusíme hneď zbadáť, že je potrebné použiť takýto model. Vhodný nástroj na identifikáciu je vykresliť autokorelačnú funkciu druhých mocnín rezíduí (t.j.  $\widehat{W}_t^2$ ) - ak boli  $W_t$  naozaj nezávislé, tak aj  $W_t^2$  sú nezávislé, teda takáto autokorelačná funkcia by mala byť blízko nuly. To ale neplatí pri ARCH a GARCH modeloch - napr. pri ARCH modeloch je  $\{W_t^2\}_{t \in \mathbb{Z}}$  za istých podmienok AR(1) proces (teda ACF by mala byť nenulová). To, že  $W_t^2$  sa dá napísať ako AR(1) proces dostávame nasledovne.

$$\begin{aligned} W_t^2 &= \varepsilon_t^2 \sigma_t^2 / - \sigma_t^2 \\ W_t^2 - \sigma_t^2 &= \varepsilon_t^2 \sigma_t^2 - \sigma_t^2 \\ W_t^2 - (\omega + \alpha_1 W_{t-1}^2) &= \varepsilon_t^2 \sigma_t^2 - \sigma_t^2 \\ W_t^2 &= \omega + \alpha_1 W_{t-1}^2 + V_t, \end{aligned}$$

kde  $V_t = \varepsilon_t^2 \sigma_t^2 - \sigma_t^2$ . Stačí už „len“ ukázať, že  $V_t$  je biely šum a  $V_t$  a  $W_s^2$  sú nekorelované<sup>3</sup> pre  $s < t$ . Je to technická (ale nie až tak náročná) záležitosť, ktorú ponecháme na zanieteného čitateľa. Na to, aby to bol „slušný biely šum“ (konečná disperzia) je ešte potrebná podmienka  $\alpha_1 < \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

## ARCH( $p$ )

Prirodzeným rozšírením ARCH(1) modelu je ARCH( $p$ ) model - znovu  $W_t = \sigma_t \varepsilon_t$ , jediný rozdiel je, že  $\sigma_t$  modelujeme ako

$$\sigma_t = \sqrt{\omega + \alpha_1 W_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p W_{t-p}^2}. \quad (3.10)$$

Podmienky pre parametre sú  $\omega, \alpha_p > 0$  a  $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1} \geq 0$  (lebo modelujeme disperziu) a  $\alpha_1 + \dots + \alpha_p < 1$  (kvôli stacionarite). Opäť platí, že  $\{W_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  je biely šum (teda náhodné premenné  $\{W_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  sú nekorelované), avšak náhodné premenné  $\{W_t^2\}_{t \in \mathbb{Z}}$  už korelované sú, takže potrebu použiť takýto typ modelu sa dá uvidieť z autokorelačnej funkcie druhých mocnín rezíduí.

<sup>3</sup>V zimnom semestri sme pri AR procesoch pracovali s nezávislosťou - v princípe na všetko podstatné (stacionarita, autokorelačná funkcia) stačí nekorelovanosť.

## GARCH( $p, q$ )

Ďalším zovšeobecnením je GARCH( $p, q$ ) model - v tomto prípade podmienenú disperziu (resp. štandardnú odchýlku) bieleho šumu modelujeme ako

$$\sigma_t = \sqrt{\omega + \alpha_1 W_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p W_{t-p}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \sigma_{t-q}^2}, \quad (3.11)$$

kde opäť požadujeme, aby  $\omega, \alpha_p, \beta_q > 0$  a zvyšné parametre nezáporné a zároveň  $\alpha_1 + \dots + \alpha_p + \beta_1 + \dots + \beta_q < 1$  (kvôli stacionarite). Aj tu platí, že  $\{W_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  je biely šum, avšak náhodné premenné  $\{W_t^2\}_{t \in \mathbb{Z}}$  už sú korelované.

### Poznámky k „praktickým záležitostiam“

- Toto všetko sú modely pre  $W_t$  - tie sa samozrejme dajú kombinovať s ARMA modelmi - napr. ARMA(1,1)-GARCH(2,1) (takto sa to zvykne označovať) je model splňajúci

$$X_t = \phi X_{t-1} + W_t + \theta W_{t-1},$$

kde  $W_t$  spĺňa GARCH(2,1) model. Pre  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  sa toho oproti „klasickému“ ARMA(1,1) modelu (s normálnym bielym šumom) veľa neudialo, zmenil sa nám iba pohľad na „reziduálnu zložku“  $\{W_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ .

- Pri ARCH modeloch dosť často treba veľké  $p$  a navyše sa zvykne stať, že odhadnuté parametre nespĺňajú podmienky - nemusia byť teda vždy najlepším riešením, spravidla lepšie funguje GARCH.
- Na výber rádu GARCH modelu (voľba  $p, q$ ) nie je nejaké univerzálne pravidlo, treba skúšať. V praxi dosť často dosť dobre funguje GARCH(1,1).
- Predpoklad o normalite  $\varepsilon_t$  môže byť v praxi problematický - v princípe stačí  $E(\varepsilon_t) = 0$ ,  $D(\varepsilon_t) = 1$ , nezávislosť a znalosť rozdelenia (keďže odhady sa robia pomocou MLE) - R-ko ponúka nejaké možnosti.

### GARCH v R-ku

Na GARCH modely sa dá v R-ku použiť balíček `fGarch`. Postup si ukážeme na príklade. Uvažujme dáta `gnp` z balíčka `astsa`. Predpokladajme, že sme klasickými postupmi zistili, že tieto dáta dobre popisuje ARIMA(1,1,1) model.

```
library(astsa)
library(fGarch)
model <- sarima(gnp,1,1,1)
```

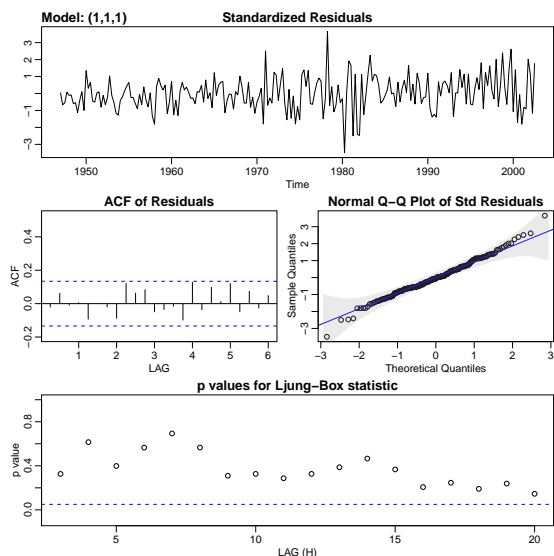
Z Obr. 1 vyzerá všetko v poriadku, avšak ak pozrieme na druhé mocniny rezíduí a ich autokorelačnú funkciu (Obr. 2),

```
W <- (model$fit)$residuals
acf2(W^2)
```

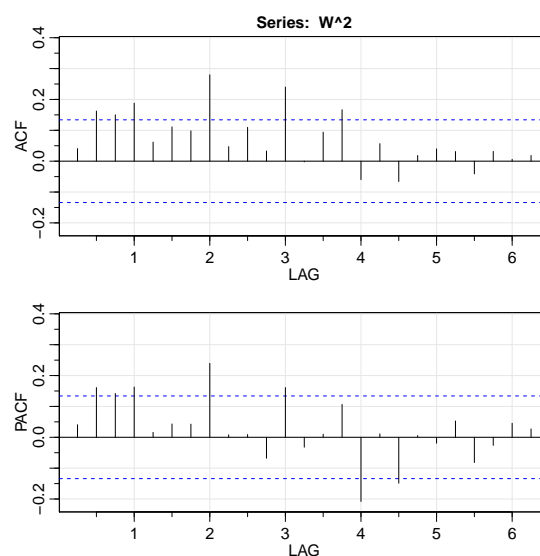
vidíme, že viaceré paličky sú dosť nad modrou čiarou - to by normálny biely šum robiť nemal. Vyskúšame teda ARMA(1,1)-GARCH(1,1) model na diferenciách - na to existuje funkcia `garchFit` (uplne základnú syntax vid' nižšie). Nevýhodou je, že sa tam nedá zadať ARIMA model, iba ARMA.

```
model2 <- garchFit(~arma(1,1)+garch(1,1), diff(gnp))
summary(model2)
```

Okrem odhadu parametrov dostaneme pomocou funkcie `summary` výsledky viacerých testov (všetky chceme nezamietnúť, t.j. chceme `p-value > 0.05`).



Obr. 1



Obr. 2

- Jarque-Bera Test a Shapiro-Wilk Test testujú normalitu  $\varepsilon_t$ ,
- Ljung-Box Test testuje nekorelovanosť  $\varepsilon_t$  (prvých 10,15 a 20 autokorelácií) a  $\varepsilon_t^2$  (tiež prvých 10,15 a 20 autokorelácií),
- LM Arch Test testuje, či nie sú medzi  $\varepsilon_t$  nejaké ďalšie závislosti (konkrétne, či sa  $\varepsilon_t^2$  nedá modelovať pomocou  $\varepsilon_{t-1}^2, \dots, \varepsilon_{t-p}^2$ , kde  $p$  sa nejakým spôsobom volí automaticky).

V našom prípade (Obr. 3) vychádza všetko v poriadku. Premenná `model2` obsahuje viacero informácií o danom modeli, zaujímavé pre nás môžu byť odhady  $W_t$  - k tým sa vieme dostať cez `model2@residuals` a odhady  $\sigma_t$  - tie dostaneme pomocou `model2@sigma.t` - pomocou nich vieme vypočítať odhady  $\varepsilon_t$  a pozrieť sa na autokorelačnú funkciu ich štvorcov (Obr. 4).

```
E <- model2@residuals/model2@sigma.t
acf2(E^2)
```

```
Error Analysis:
  Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
mu      9.61047    3.29283   2.919  0.00352 **
arl      0.71845    0.09332   7.698  1.38e-14 ***
mal     -0.35507    0.12152  -2.922  0.00348 **
omega   42.80421   40.80899   1.049  0.29423
alpha   0.10884    0.04580   2.376  0.01748 *
beta1   0.87213    0.05466  15.955 < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

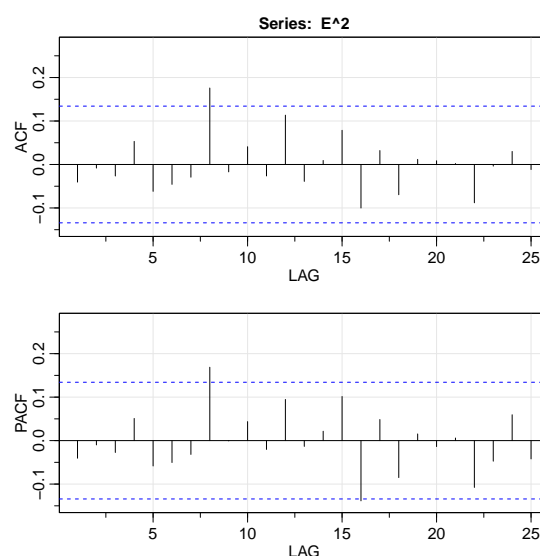
Log Likelihood:
-1112.803   normalized: -5.012627

Description:
Thu Mar 12 19:52:46 2020 by user: jozefkovic

Standardised Residuals Tests:

      Statistic p-Value
Jarque-Bera Test R      Chi^2  4.196941  0.1226438
Shapiro-Wilk Test R      W      0.9928259  0.3565251
Ljung-Box Test   R      Q(10)  8.39251   0.5905552
Ljung-Box Test   R      Q(15) 11.51377  0.7153972
Ljung-Box Test   R      Q(20) 23.39595  0.2697735
Ljung-Box Test   R^2    Q(10) 10.38932  0.407026
Ljung-Box Test   R^2    Q(15) 15.46545  0.4184384
Ljung-Box Test   R^2    Q(20) 19.36691  0.498104
LM Arch Test     R      TR^2  11.35133  0.4990732
```

Obr. 3



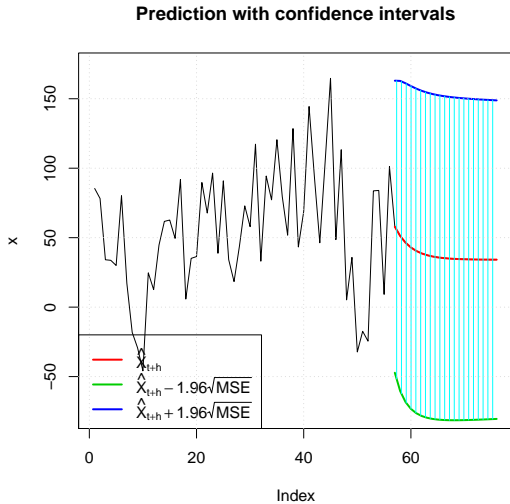
Obr. 4

Vidíme, že jedna palička tam síce stále „trčí“, ale je len jedna a Ljung-Box test bol v poriadku, takže nás to nemusí príliš trápiť.

V prípade, že zadáme `plot(model2)`, dostaneme na výber viacero možností, ktorý obrázok chceme vykresliť. Ak chceme predikovať (napr. 20 období dopredu, Obr. 5), použijeme

`predict(model2, n.ahead=20, plot=TRUE)`

Okrem predovied  $X_t$  (v prvom stĺpci, Obr. 6) môžeme v treťom stĺpci `standardDeviation` vidieť, aké sú budúce predpovede pre  $\sigma_t$  (keďže aj tie modelujeme).



Obr. 5

```
> predict(model2, n.ahead=20, plot=TRUE)
```

	meanForecast	meanError	standardDeviation	lowerInterval	upperInterval
1	57.88626	53.63063	53.63063	-47.22784	163.0004
2	51.19880	56.95688	53.51920	-60.43464	162.8322
3	46.39421	58.53913	53.40967	-68.34038	161.1288
4	42.94235	59.28040	53.30200	-73.24510	159.1298
5	40.46237	59.60192	53.19618	-76.35526	157.2800
6	38.68063	59.71091	53.09216	-78.35060	155.7119
7	37.40053	59.71185	52.98992	-79.63255	154.4336
8	36.48085	59.65812	52.88944	-80.44691	153.4086
9	35.82011	59.57709	52.79068	-80.94885	152.5891
10	35.34540	59.48289	52.69363	-81.23893	151.9297
11	35.00434	59.38278	52.59824	-81.38377	151.3925
12	34.75931	59.28051	52.50451	-81.42835	150.9470
13	34.58327	59.17799	52.41239	-81.40345	150.5700
14	34.45679	59.07620	52.32187	-81.33043	150.2440
15	34.36593	58.97564	52.23292	-81.22421	149.9561
16	34.30064	58.87655	52.14552	-81.09528	149.6966
17	34.25374	58.77904	52.05964	-80.95106	149.4585
18	34.22004	58.68315	51.97525	-80.79682	149.2369
19	34.19583	58.58889	51.89234	-80.63629	149.0280
20	34.17844	58.49627	51.81088	-80.47214	148.8290

Obr. 6

## 4 Regresia v časových radoch

Doteraz sme predpokladali, že pri analýze časového radu máme k dispozícii iba vektor  $(x_1, \dots, x_n)^T$  (realizáciu konečného úseku časového radu  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ ). Na základe neho sme sa potom snažili nájsť nejaký SARIMA modeli, ktorý by nám tieto dáta dostatočne dobre popisoval. Niekedy však môžeme mať v čase  $t = 1, \dots, n$  k dispozícii aj hodnoty  $z_{t,1}, z_{t,2}, \dots, z_{t,m}$  nejakých ďalších  $m$  premenných, ktoré by mohli „prispieť“ k popísaniu správania časového radu  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ . Štandardne v takýchto situáciách uvažujeme lineárny model

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 z_{t,1} + \beta_2 z_{t,2} + \dots + \beta_m z_{t,m} + \varepsilon_t, \quad (4.1)$$

$t = 1, \dots, n$ , kde  $\varepsilon_t$  je nejaká náhodná chyba (zatiaľ o nej predpokladajme len to, že  $E(\varepsilon_t) = 0$ ). Maticovo môžeme tento model zapísať ako

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\mathbb{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & z_{1,1} & z_{1,2} & \dots & z_{1,m} \\ 1 & z_{2,1} & z_{2,2} & \dots & z_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_{n,1} & z_{n,2} & \dots & z_{n,m} \end{pmatrix}}_{\mathbb{Z}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}}_{\beta} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}}_{\varepsilon}. \quad (4.2)$$

Cieľom takéhoto modelu je spravidla odhadnúť vektor  $\beta$  a vyselektovať, ktoré z  $m$  vysvetľujúcich premenných majú v takomto modeli štatisticky významný vplyv na vysvetľovanú premennú (t.j. pri ktorých  $\beta_i$  nezamietneme hypotézu  $H_0 : \beta_i = 0$ ) a či je ten vplyv pozitívny ( $\beta_i > 0$ ), alebo negatívny ( $\beta_i < 0$ ). V prípade, že vieme dobre predikovať hodnoty  $z_{T,1}, \dots, z_{T,m}$  pre  $T = n + 1, n + 2, \dots$ , môžeme tento model použiť aj na predikovanie  $X_{n+1}, X_{n+2}, \dots$ .

Ak by platilo, že  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  je normálny biely šum, tak  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^T \sim N(0, \sigma^2 I)$ , čo je úplne najštandardnejšia situácia (ktorá už bola podrobne rozoberaná na viacerých prednáškach) - vektor  $\beta$  v takom prípade odhadujeme ako

$$\hat{\beta} = (Z^T Z)^{-1} Z^T \mathbb{X} \quad (4.3)$$

a o  $\beta$  vieme testovať rôzne druhy hypotéz. V prípade časových radov sa ale často stane, že  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  nie je normálny biely šum, ale sú v ňom rôzne závislosti. To spôsobí, že neplatí  $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$ , čiže odhad (4.3) nemusí byť vôbec dobrý nápad, takisto testy hypotéz nemusia fungovať tak, ako by mali. Oveľa reálnejší (alebo povedzme, že aspoň všeobecnejší) predpoklad je, že  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  sa správa podľa nejakého ARMA( $p, q$ ) (prípadne ARIMA) modelu.

Predpokladajme najprv, že tento model je známy, t.j. v modeli pre  $\varepsilon_t$

$$\varepsilon_t = \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \phi_p \varepsilon_{t-p} + W_t + \theta_1 W_{t-1} + \dots + \theta_q W_{t-q} \quad (4.4)$$

by sme poznali  $p$  a  $q$  a takisto aj presné hodnoty parametrov  $\Phi \equiv (\phi_1, \dots, \phi_p)$  a  $\Theta \equiv (\theta_1, \dots, \theta_q)$ . Okrem toho predpokladajme, že  $\{W_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  je normálny biely šum. Konštantný člen nemusíme uvažovať, lebo stále platí rozumný predpoklad, že  $E(\varepsilon_t) = 0$ . V takejto situácii by platilo, že vektor  $\varepsilon$  v modeli (4.2) má normálne rozdelenie  $N(0, \sigma^2 W)$ , kde kovariančnú maticu  $W$  vieme presne vypočítať (rovnako ako v (2.8) s tým rozdielom, že sme vyňali  $\sigma^2$ ). S týmto sa už dá pracovať, pretože ak celý model (4.2) zľava prenásobíme maticou  $W^{-\frac{1}{2}}$ , dostaneme

$$W^{-\frac{1}{2}} \mathbb{X} = W^{-\frac{1}{2}} Z \beta + W^{-\frac{1}{2}} \varepsilon, \quad (4.5)$$

kde  $W^{-\frac{1}{2}} \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 W^{-\frac{1}{2}} W W^{-\frac{1}{2}})$ , čo už je  $N(0, \sigma^2 I)$ , čiže štandardná situácia. Vektor parametrov  $\beta$  v tomto prípade odhadujeme ako

$$\hat{\beta} = (Z^T W^{-1} Z)^{-1} Z^T W^{-1} \mathbb{X} \quad (4.6)$$

a vieme s ním robiť všetky procedúry ako v obyčajnej regresii (tomuto sa hovorí „Generalised least square“, skrátene GLS). Zároveň platí, že odhady (4.3) a (4.6) sú totožné s MLE odhadmi.

Reálne ale parametre  $\Phi$  a  $\Theta$  nemáme ako poznať, takže ich tiež musíme odhadnúť. To opäť vieme pomocou MLE, pretože ak  $\mathbb{X} = Z\beta + \varepsilon$ , kde  $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 W(\Phi, \Theta))$ , tak  $\mathbb{X} \sim N(Z\beta, \sigma^2 W(\Phi, \Theta))$ , t.j. hustota  $\mathbb{X}$  je

$$f(\mathbb{X} | \beta, \sigma^2, \Phi, \Theta) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\sigma^2 W(\Phi, \Theta))}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (\mathbb{X} - Z\beta)^T W(\Phi, \Theta)^{-1} (\mathbb{X} - Z\beta) \right\}. \quad (4.7)$$

„Stačí“ teda nájsť parametre  $\beta, \sigma^2, \Phi, \Theta$ , ktoré túto funkciu maximalizujú. Toto už môže trvať celkom dlho aj počítaču - najmä pri veľkom  $n$  v kombinácii s vysokými rádmi  $p, q$  ARMA modelu pre  $\varepsilon$ . (Z vlastných skúseností - pre  $n \approx 4000$  a  $p, q$  okolo 3 to trvalo rádovo v desiatkach až stovkách minút, ale samozrejme záleží aj od počítača.)

## Kontrola modelu

Ak boli naše predpoklady správne, tak  $\hat{\varepsilon}_W \equiv W(\hat{\Phi}, \hat{\Theta})^{-\frac{1}{2}} \hat{\varepsilon}$  (kde  $\hat{\varepsilon} = \mathbb{X} - Z\hat{\beta}$  je odhad  $\varepsilon$ ) by nemalo byť ďaleko od  $N(0, \sigma^2 I)$  - to je potrebné overiť. Normalitu napríklad pomocou normálneho QQ-plot-u, histogramu, prípadne nejakého testu a nekorelovanosť napríklad pomocou ACF, prípadne Ljung-Box-ovho testu. Ak toto nie je v poriadku, tak je model potrebné upraviť - napríklad skúsiť zmeniť  $p, q$ , prípadne pridať nejaké ďalšie/iné premenné (o tom trochu neskôr).

Niekedy sú dáta  $(x_1, \dots, x_n)$  „rozlietané“, čo potom môže spôsobiť, že  $\hat{\varepsilon}_W$  nebudú ani zďaleka pripomínať normalitu (napr. normálny QQ-plot bude mať „esíčkovitý“ tvar) - v praxu môže (nemusi) pomôcť zlogaritmovanie vektora  $(x_1, \dots, x_n)$  (na to samozrejme musia byť kladné) - treba si potom ale dávať pozor pri interpretácii modelu.

## Testovanie submodelov

Ak chceme zistiť, či je nejaká skupina vysvetľujúcich premenných štatisticky nevýznamná, môžeme použiť test pomerom vierohodnosti. Predpokladajme napríklad, že chceme testovať nevýznamnosť prvých dvoch vysvetľujúcich premenných, čo je v takomto modeli ekvivalentné hypotéze

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0 \quad vs. \quad H_1 : \beta_1 \neq 0 \vee \beta_2 \neq 0.$$

Na test pomerom vierohodnosti najprv zostrojíme submodel

$$x_t = \beta_0 + \beta_3 z_{t,3} + \dots + \beta_m z_{t,m} + \varepsilon_t \quad (4.8)$$

a nájdeme MLE odhady parametrov. Za platnosti  $H_0$  (a nejakých ďalších podmienok pre test pomerom vierohodnosti, ktoré dúfame, že platia) má testovacia štatistika  $-2 \ln \frac{L_{submodel}}{L_{model}}$  chí-kvadrát rozdelenie s dvoma stupňami voľnosti.  $L_{model}$  (resp.  $L_{submodel}$ ) je maximum vierohodnostnej funkcie pre model (resp. submodel) - napríklad  $L_{model}$  by sme získali dostali ako

$$\max_{\beta, \sigma^2, \Phi, \Theta} f(\mathbb{X} | \beta, \sigma^2, \Phi, \Theta), \quad (4.9)$$

kde funkcia  $f$  je definovaná v (4.7). Počet stupňov voľnosti  $\chi^2$ -rozdelenia je určený podľa počtu parametrov, ktoré testujeme.

### Voľba rádu ARMA modelu

Otázkou ešte ostáva ako vybrať hodnoty  $p$  a  $q$  ARMA( $p, q$ ) modelu pre  $\varepsilon_t$  - vhodných kandidátov môžeme nájsť tak, že nájdeme ARMA( $p, q$ ) model pre  $\hat{\varepsilon}_O$  - rezíduá z klasickej regresie, t.j.

$$\hat{\varepsilon}_O = \mathbb{X} - Z\hat{\beta}_O = \mathbb{X} - Z(Z^T Z)^{-1} Z^T \mathbb{X} \quad (4.10)$$

( $\hat{\beta}_O$  je odhad  $\beta$  za predpokladu, že  $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$ , t.j.  $\hat{\beta}_O = (Z^T Z)^{-1} Z^T \mathbb{X}$ ). ARMA( $p, q$ ) model hľadáme metódami zo zimného semestra (pomocou ACF, PACF a skúšania). Takéto  $p, q$  samozrejme nemusia úplne dobre fungovať, pretože  $\hat{\varepsilon}_O$  je iba odhad  $\varepsilon$  a ešte k tomu aj zlý (lebo odhad  $\hat{\beta}_O$  je zlý). Môže to ale byť aspoň dobrý tip na začiatok - ak nebude fungovať, môžeme napríklad vyskúšať  $p+1, q$  a podobne.

Aby sme to zhrnuli, tak ak chceme robiť regresiu v časovom rade, postupujeme nasledovne (toto sa dá nájsť pod názvom „Cochrane-Orcutt procedure“):

1. Spravíme obyčajnú regresiu a odhadneme rezíduá  $\hat{\varepsilon}_O$ .
2. Nájdeme ARMA( $p, q$ ) model pre  $\hat{\varepsilon}_O$ .
3. Nájdeme MLE odhady pre  $\beta, \sigma^2, \Phi, \Theta$  za predpokladu, že  $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 W(\Phi, \Theta))$ , kde vektory parametrov  $\Phi, \Theta$  majú dĺžku podľa bodu 2.
4. Skontrolujeme model, ak nie je v poriadku, tak ho skúsime upraviť.

### Zopár technických poznámok

1. Ak by sa nám zdalo, že pre  $\varepsilon$  je vhodnejší ARIMA model (čiže sú potrebné aj diferencie), stačí pracovať s diferenciami všetkých premenných, ktoré máme - ak totiž platí

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 z_{t,1} + \dots + \beta_m z_{t,m} + \varepsilon_t \quad (4.11)$$

pre  $t = 1, \dots, n$ , tak platí aj

$$\begin{aligned} x_t - x_{t-1} &= \beta_0 + \beta_1 z_{t,1} + \dots + \beta_m z_{t,m} + \varepsilon_t - \beta_0 - \beta_1 z_{t-1,1} - \dots - \beta_m z_{t-1,m} - \varepsilon_{t-1} \\ \nabla x_t &= \beta_1 \nabla z_{t,1} + \dots + \beta_m \nabla z_{t,m} + \nabla \varepsilon_t \end{aligned}$$

pre  $t = 2, \dots, n$ . Interpretácia parametrov  $\beta_1, \dots, \beta_m$  ostáva rovnaká ako v pôvodnom modeli a už sme dostali  $\nabla \varepsilon_t$ , čo sme chceli (jedine sme teda „prišli“ o konštantný člen  $\beta_0$ ).



2. Pre jednoduchosť uvažujme teraz iba jednu vysvetľujúcu premennú (pre viac premenných je idea úplne rovnaká - to len aby sme sa neupísamenkovali) nadobúdajúcu v čase  $t = 1, \dots, n$  hodnotu  $z_t$ . Niekedy sa stane, že  $x_t$  lepšie vysvetľujú „minulé“ hodnoty vysvetľujúcej premennej, teda miesto modelu

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 z_t + \varepsilon_t, \quad (4.12)$$

môže byť lepšie uvažovať model

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 z_{t-1} + \varepsilon_t. \quad (4.13)$$

Niekedy môžu fungovať aj „dávnejšie“ hodnoty (čiže  $z_{t-2}, z_{t-3}, \dots$ ). Dobrým indikátorom toho, že lepšie môžu fungovať minulé hodnoty, je nízka hodnota výberovej korelácie medzi  $(x_1, \dots, x_n)$  a  $(z_1, \dots, z_n)$  a nie nízka hodnota výberovej korelácie medzi  $(x_2, \dots, x_n)$  a  $(z_1, \dots, z_{n-1})$  (resp. medzi  $(x_{k+1}, \dots, x_n)$  a  $(z_1, \dots, z_{n-k})$ ) - toto je mimochodom hodnota odhadu takzvanej „cross-correlation function“ (CCF) medzi  $(z_1, \dots, z_n)$  a  $(x_1, \dots, x_n)$  v bode  $k$ . V R-ku takúto funkciu dostaneme pomocou `ccf(z, x)`, kde v premennej  $z$  sú uložené hodnoty  $(z_1, \dots, z_n)$  a v premennej  $x$  hodnoty  $(x_1, \dots, x_n)$ .

3. Pri  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  sa teoreticky nemusíme obmedziť iba na ARMA modely, môžeme uvažovať aj nejaký ARMA( $p, q$ )-GARCH( $p', q'$ ) model.

### Ako to robiť v R-ku...

...si ukážeme na generovaných dátach, ktoré si vytvoríme napríklad takto.

```
set.seed(1)
E_t <- arima.sim(n=100,
model=list(order=c(1,0,2),ar=c(0.85),ma=c(-0.7,0.5)),
sd=20)
```

```
set.seed(1)
z1 <- sample(1:1000,100, rep=TRUE)
z2 <- sample(1:1000,100, rep=TRUE)
z3 <- sample(1:1000,100, rep=TRUE)
z4 <- sample(1:1000,100, rep=TRUE)
```

```
x <- 5 + 2*z1 - 1.3*z3 + E_t
```

Na tieto dáta vyskúšame model

$$x_t = \beta_0 + \beta_1 z_{t,1} + \beta_2 z_{t,2} + \beta_3 z_{t,3} + \beta_4 z_{t,4} + \varepsilon_t. \quad (4.14)$$

Keďže  $z_2$  ani  $z_4$  sme pri „výrobe“  $x$  nepoužili, mali by nám výjsť nesignifikantné. Na kontrolu toho, či nie je lepšie použiť staršie - napr.  $z_{t-1,1}$  (tzv. „lagged variables“) hodnoty vysvetľujúcich premenných si môžeme vykresliť CCF funkcie.

```
ccf(z1,x)
ccf(z2,x)
ccf(z3,x)
ccf(z4,x)
```

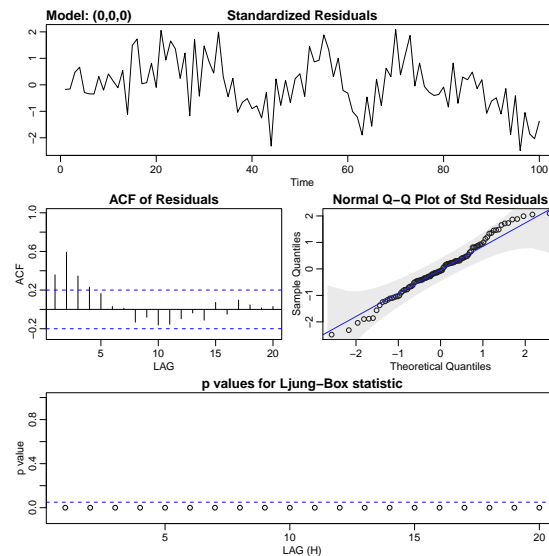
Vidíme (ak si to teda spustíme v R-ku - v rámci šetrenia priestoru tu nebudú ukázané všetky obrázky), že ak sú korelácie vysoké, tak jedine v nule, takže staršie hodnoty vysvetľujúcich premenných nie sú nutné.

Ako prvé spravíme teda obyčajný model a pozrieme sa, či by jeho rezíduá  $\hat{\varepsilon}_O$  nemohli byť realizáciou normálneho bieleho šumu. (A ak sme to ešte nespravili, tak si načítame balíček `astsa`.)

```

model_obycajny <- lm(x~z1+z2+z3+z4)
E_0 <- residuals(model_obycajny) #ziskanie rezidui
sarima(E_0,0,0,0) #kontrola, ci to moze byt normalny biely sum

```



Obr. 7

Z Obr. 7 vidíme, že  $\hat{\varepsilon}_O$  zrejme realizácia normálneho bieleho šumu nebude, takže skúsime nejaký ARMA model. Používajúc techniky z minulého semestra by sme dospeli k tomu, že tieto rezíduá (kupodivu) dobre popisuje ARMA(1,2) model. Vyskúšame teda ten istý model, ale s predpokladom, že korelačná štruktúra  $\varepsilon$  (v podstate matica  $W$ ) je rovnaká ako korelačná štruktúra ARMA(1,2) modelu - v R-ku sa to dá pomocou funkcie `gls` z balíčka `nlme`.

```

model <- gls(x~z1+z2+z3+z4, correlation = corARMA(p = 1, q = 2), method = "ML")

```

K štandardizovaným rezíduám  $\hat{\varepsilon}_W$  sa vieme dostať cez

```

E_W <- residuals(model,type="normalized")

```

a opäť môžeme skontrolovať normalitu a nekorelovanosť.

```

sarima(E_W,0,0,0)

```

Môžeme vidieť, že ani toto (kupodivu - tentoraz už naozaj) nevyzerá byť na normálny biely šum. Skúsme teda zvýšiť  $p$ .

```

model2 <- gls(x~z1+z2+z3+z4, correlation = corARMA(p = 2, q = 2), method = "ML")
E_W2 <- residuals(model2,type="normalized")
sarima(E_W2,0,0,0)

```

Toto už je v poriadku. Na prehľad o odhadoch parametrov a ich signifikantnosti možno použiť (rovnako ako pri klasickom lineárnom modeli získanom funkciou `lm`) funkciu `summary(model2)`. Ak by sme chceli testovať hypotézu  $H_0 : \beta_2 = \beta_4 = 0$ , musíme si najprv vytvoriť submodel bez premenných  $z_2, z_4$ .

```

submodel <- gls(x~z1+z3, correlation = corARMA(p = 2, q = 2), method = "ML")

```

Test pomerom vierohodnosti potom spravíme pomocou funkcie `anova`.

```

anova(model2,submodel)

```

	Model	df	AIC	BIC	logLik	Test	L.Ratio	p-value
model2	1	10	864.1921	890.2438	-422.0961			
submodel	2	8	863.9374	884.7788	-423.9687	1 vs 2	3.745328	0.1537

Obr. 8

Zaujímá nás  $p$ -value (vpravo dole na Obr. 8) - v tomto prípade 0.1537, čo je viac ako 5%, čiže hypotézu  $H_0$  nezamietame, t.j. stačí nam iba submodel. Nakoniec môžeme ešte skontrolovať, či sú v poriadku aj rezíduá v submodeli (sú).

```
sarima(residuals(submodel, type="normalized"),0,0,0)
```

Ak by sme chceli pridať aj nejaký GARCH model pre  $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , tak sa to v R-ku dá (balíček `rugarch`), ale nie je to veľmi „user-friendly“ a je to nad rámec tejto prednášky. Koho by to zaujímalo, tak odporúčam pozrieť si stránku <https://stats.stackexchange.com/questions/93815/fit-a-garch-1-1-model-with-covariates-in-r>.

## 5 Dekompozícia časového radu

V mnohých prípadoch sme sa stretli s časovými radmi, ktoré kvôli trendu (prípadne sezonalite) neboli stacionárne, takže nebolo možné na ne aplikovať ARMA (resp. SARMA) modely (teda možné to teoreticky bolo, len výsledky by boli nepoužiteľné). Doteraz sme tento problém riešili diferencovaním (resp. sezónnym diferencovaním), čiže ARIMA (resp. SARIMA) modelmi. To je síce užitočný nástroj, má však aj svoje nevýhody. Predpokladajme napríklad, že pre časový rad  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  platí

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + E_t, \quad (5.1)$$

kde  $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  sú neznáme parametre a  $E_t$  je nejaký stacionárny časový rad. V zimnom semestri sme ukázali (alebo aspoň spomenuli), že ak s takýmto časovým radom urobíme dve diferencie, dostaneme

$$\nabla^2 X_t = 2\beta_2 + \nabla^2 E_t, \quad (5.2)$$

čo už je stacionárny proces. Pri tomto postupe sme síce vyriešili nestacionaritu, avšak „cestou“ sme stratili  $\beta_0$  a  $\beta_1$ , ktoré nás potenciálne mohli zaujímať.

Z tohto dôvodu preto môže byť niekedy užitočnejšia takzvaná dekompozícia časového radu na

$$X_t = Tr_t + S_t + E_t, \quad (5.3)$$

kde

- $Tr_t$  je trend,
- $S_t$  je sezónna zložka - predpokladáme o nej, že  $S_t = S_{t+p}$  pre nejakú dĺžku periódy  $p$  - spravidla toto  $p$  poznáme (napr. pri mesačných dátach často  $p = 12$ , pri denných  $p = 7$  a podobne); okrem toho predpokladáme  $S_1 + S_2 + \dots + S_p = 0$  (t.j.  $S_t$  sú iba nejaké odchýlky od trendu spôsobené daným obdobím),
- $E_t$  je stacionárny proces s nulovou strednou hodnotou.

Pri takomto modeli spravidla postupujeme tak, že

1. z pozorovaní  $x_1, \dots, x_n$  odhadneme trend a sezónnu zložku (tieto odhady označíme  $\widehat{Tr}_t$  a  $\widehat{S}_t$ ),
2. vypočítame odhad  $\widehat{E}_t = x_t - \widehat{Tr}_t - \widehat{S}_t$ ,
3. nájdeme ARMA (prípadne ARMA-GARCH) model pre  $\{\widehat{E}_t\}_{t=1}^n$ ,

4. ak chceme časový rad predikovať, tak na predikciu v čase  $n + k$  ( $k > 0$ ) môžeme použiť
- $$\widehat{X}_{n+k} = \widehat{Tr}_{n+k} + \widehat{S}_{n+k} + \widehat{E}_{n+k}.$$

Výhodou takéhoto prístupu je, že lepšie „vidíme“ do štruktúry časového radu - napríklad ak pre denné tržby obchodu vypočítame

$$\widehat{Tr}_t = 1000 + 5t$$

a konkrétne hodnoty  $\widehat{S}_{pondelok}, \widehat{S}_{utorok}, \dots, \widehat{S}_{nedela}$  (zodpovedajúce napr. hodnotám  $\widehat{S}_1, \dots, \widehat{S}_7$  - ak  $t = 1$  zodpovedá pondelku), vieme z toho vyčítať, že v priemere tržby stúpajú o 5 EUR za deň a takisto sa vieme niečo dozvedieť o správaní zákazníkov v jednotlivých dňoch (napríklad, že v nedeľu nakupujú menej ako v sobotu, lebo  $\widehat{S}_{sobota} > \widehat{S}_{nedela}$ ) - takéto informácie by sa zo SARIMA modelu dostávali ťažko. Nevýhodou je, že odhady môžu byť nepresnejšie (napríklad  $\widehat{E}_{n+k}$  je iba „odhad z odhadu“, pretože skutočné hodnoty  $E_1, \dots, E_n$  nepoznáme, máme iba ich odhady), nehovoriac o intervaloch spoľahlivosti (ak sa do nich vôbec pustíme - niekedy to ani nemá zmysel).

V ďalších podkapitolách si stručne povieme o odhadovaní  $Tr_t$  a  $S_t$ . (Postupy sú celkom intuitívne, takže nepôjdeme veľmi do hĺbky. Koho by to náhodou zaujímalo detailnejšie, tak učím aj manažérsky predmet Analýza časových radov, kde tieto veci učím podrobnejšie - poznámky možno nájsť na [http://www.iam.fmph.uniba.sk/ospm/Kovac/Materialy/ACR\\_Poznamky.pdf](http://www.iam.fmph.uniba.sk/ospm/Kovac/Materialy/ACR_Poznamky.pdf)).

## Regresný prístup

Predpokladajme, že trend sa dá zapísať ako

$$Tr_t = \sum_{i=0}^m \beta_i f_i(t), \quad (5.4)$$

kde  $f_0, \dots, f_m$  sú známe funkcie a  $\beta_0, \dots, \beta_m$  neznáme parametre. Potom (5.3) vieme zapísať v tvare

$$X_t = \beta_0 f_0(t) + \dots + \beta_m f_m(t) + S_1 z_{1t} + S_2 z_{2t} + \dots + S_p z_{pt} + E_t, \quad (5.5)$$

kde pre  $j = 1, \dots, p$  je

$$z_{jt} = \begin{cases} 1 & \text{ak čas } t \text{ zodpovedá } j\text{-temu sezónnemu obdobiu,} \\ 0 & \text{inak.} \end{cases} \quad (5.6)$$

Napríklad ak predpokladáme lineárny trend pri kvartálnych dátach, tak  $f_0(t) = 1$  a  $f_1(t) = t$ , čiže môžeme písať

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 t + S_1 z_{1t} + \dots + S_4 z_{4t} + E_t, \quad (5.7)$$

kde pre  $j = 1, 2, 3, 4$  je

$$z_{jt} = \begin{cases} 1 & \text{ak čas } t \text{ zodpovedá } j\text{-temu kvartálu,} \\ 0 & \text{inak.} \end{cases} \quad (5.8)$$

Môžeme si všimnúť, že model (5.5) (a teda aj model (5.7)) je zbytočne preparametrizovaný, pretože predpokladáme  $S_1 + \dots + S_p = 0$ , čiže napríklad  $S_1$  vieme vyjadriť ako  $-(S_2 + S_3 + \dots + S_p)$ . Model (5.5) vieme tým pádom zjednodušiť na

$$\begin{aligned} X_t &= \sum_{i=0}^m \beta_i f_i(t) - (S_2 + \dots + S_p) z_{1t} + S_2 z_{2t} + \dots + S_p z_{pt} + E_t \\ &= \sum_{i=0}^m \beta_i f_i(t) + \sum_{j=2}^p S_j (z_{jt} - z_{1t}) + E_t, \end{aligned}$$

čo je lineárny model s parametrami  $(\beta_0, \dots, \beta_m, S_2, S_3, \dots, S_p)$ . Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že čas  $t = 1$  zodpovedá prvému sezónnemu obdobiu (čiže  $z_{11} = 1$  a  $z_{21} = \dots = z_{p1} = 0$ ) a čas  $t = n$  zase  $p$ -temu obdobiu - maticovo potom vieme tento model zapísať ako

$$\underbrace{\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_p \\ X_{p+1} \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_0(1) & f_1(1) & \dots & f_m(1) & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ f_0(2) & f_1(2) & \dots & f_m(2) & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ f_0(3) & f_1(3) & \dots & f_m(3) & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_0(p) & f_1(p) & \dots & f_m(p) & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ f_0(p+1) & f_1(p+1) & \dots & f_m(p+1) & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ f_0(n) & f_1(n) & \dots & f_m(n) & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_F \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_m \\ S_2 \\ \vdots \\ S_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ \vdots \\ E_p \\ E_{p+1} \\ \vdots \\ E_n \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

takže odhad parametrov metódov najmenších štvorcov nájdeme ako  $(F^T F)^{-1} F^T \mathbf{x}$  ( $\mathbf{x}$  je realizácia  $\mathbf{X}$ , čiže dáta) - tento odhad je nevychýlený a za istých celkom splniteľných podmienok aj konzistentný. Odhad  $\widehat{S}_1$  potom dopočítame ako  $-(\widehat{S}_2 + \dots + \widehat{S}_p)$ . Ak náhodou  $E_t \sim \text{iid } N(0, \sigma^2)$ , tak vieme robiť aj testy, intervaly spoľahlivosti a podobne. Ak  $E_t$  túto podmienku nespĺňa, teoreticky nevidím dôvod nepoužiť rovnaký postup ako v predchádzajúcej časti („Regresia v časových radoch“). Prakticky som sa s tým v učebniciach/prednáškach nestretol, takže možno je tam nejaký problém - ak by ho náhodou niekto vedel, budem rád, keď mi to povie.

## Jednoduchý prístup

Niekedy sa trend nedá (resp. nie je úplne rozumné ho) zapísať ako v (5.4), napríklad preto, že trend mení v čase svoj charakter. V takom prípade môžeme trend odhadnúť pomocou takzvaných kľzavých priemerov (po anglicky „moving average“ - pozor, toto nemá nič spoločné s  $MA(q)$  procesmi (teda okrem názvu)). V prípade, že dĺžka periódy  $p$  je nepárna, zvykne sa použiť, takzvaný jednoduchý kľzavý priemer šírky  $p$ , ktorý je tvaru

$$\widehat{Tr}_t = \frac{1}{p} \left( x_{t-\frac{p-1}{2}} + x_{t-\frac{p-1}{2}+1} + \dots + x_t + \dots + x_{t+\frac{p-1}{2}-1} + x_{t+\frac{p-1}{2}} \right), \quad (5.10)$$

napr. ak  $p = 7$  (napr. pri denných dátach), tak

$$\widehat{Tr}_t = \frac{1}{p} (x_{t-3} + x_{t-2} + x_{t-1} + x_t + x_{t+1} + x_{t+2} + x_{t+3})$$

(pri denných dátach by to bol priemer z celého týždňa (z okolitých dní)). Ak  $p$  je párne, zvykne sa použiť takzvaný centrováný kľzavý priemer, ktorý je tvaru

$$\widehat{Tr}_t = \frac{1}{2p} \left( x_{t-\frac{p}{2}} + 2x_{t-\frac{p}{2}+1} + \dots + 2x_{t+\frac{p}{2}-1} + x_{t+\frac{p}{2}} \right), \quad (5.11)$$

napr. ak  $p = 4$ , tak

$$\widehat{Tr}_t = \frac{1}{8} (x_{t-2} + 2x_{t-1} + 2x_t + 2x_{t+1} + x_{t+2}).$$

Týmto samozrejme nevieme vyriešiť okrajové body - napr. pri  $p = 4$  nevieme takto vypočítať  $\widehat{Tr}_1, \widehat{Tr}_2, \widehat{Tr}_{n-1}$  a  $\widehat{Tr}_n$ , pretože nemáme hodnoty  $x_{-1}, x_0, x_{n+1}$  a  $x_{n+2}$ . Teoreticky existuje spôsob ako rozumne nájsť odhady pre tieto hodnoty, prakticky sa tieto hodnoty vynechávajú. Sezonalitu potom odhadneme nasledovne:

1. Položíme

$$\widetilde{S}_1 = \frac{1}{|A_1|} \sum_{t \in A_1} (x_t - \widehat{Tr}_t),$$

kde  $A_1 = \{t \text{ zodpovedajúce prvému časovému obdobiu, pre ktoré máme k dispozícii hodnotu } x_t - \widehat{Tr}_t\}$ . Napríklad ak máme mesačné dáta od januára 2001 ( $t = 1$ ) do decembra 2010 ( $t = 120$ ), tak „januárové časy“ sú  $t = 1, 13, 25, \dots, 109$ , pričom  $\widehat{Tr}_1$  nemáme k dispozícii, takže v tomto prípade má množina  $A_1$  tvar  $A_1 = \{13, 25, \dots, 109\}$  a  $\widetilde{S}$  je aritmetický priemer hodnôt  $x_{13} - \widehat{Tr}_{13}, x_{25} - \widehat{Tr}_{25}, \dots, x_{109} - \widehat{Tr}_{109}$ . Analogicky vypočítame aj  $\widetilde{S}_2, \dots, \widetilde{S}_p$ .

2. Znормujeme tieto hodnoty aby súčet bol 0 takým spôsobom, že pre  $i = 1, 2, \dots, p$  položíme

$$\widehat{S}_i = \widetilde{S}_i - \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p \widetilde{S}_j. \quad (5.12)$$

V prípade, že by sme chceli predikovať hodnoty  $X_{n+1}, \dots, X_{n+k}$  pre nejaké  $k > 0$ , potrebovali by sme aj hodnoty  $\widehat{Tr}_{n+1}, \dots, \widehat{Tr}_{n+k}$ , ktoré nám ale metóda klzavých priemerov neposkytuje (teoreticky sa nejaké krátkodobé predpovede dajú zostrojiť, prakticky nie sú úplne dobré a až tak sa nepoužívajú). Akýsi heuristický prístup, ktorý sa dá v takomto prípade použiť je

1. zobrať posledných  $k$  bodov trendu, ktorých odhady máme (t.j.  $\widehat{Tr}_s, \widehat{Tr}_{s-1}, \dots, \widehat{Tr}_{s-k+1}$ , kde  $s$  označuje posledný bod trendu, ktorý máme odhadnutý),
2. nájsť k týmto bodom metódou najmenších štvorcov priamku  $\widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 t$ ,
3. pre  $j = 1, \dots, k$  odhadnúť  $Tr_{n+j}$  ako  $f(n+j)$ , kde  $f$  je dané ako

$$f(t) = (t-s)\widehat{\beta}_1 + \widehat{Tr}_s, \quad (5.13)$$

teda je to priamka, ktorá sa „napája“ na náš odhad trendu (v bode  $s$  má hodnotu  $\widehat{Tr}_s$ ) a má sklon  $\widehat{\beta}_1$ .

## Jednoduché exponenciálne vyrovnávanie<sup>4</sup>

Opäť ide o heuristickú metódu, takže často tu budú „voľnejšie“ tvrdenia/odvodenia a ak vás náhodou napadne otázka „Prečo toto robíme práve takto?“, tak odpoveď je spravidla „Lebo sa ukázalo, že to dobre funguje.“ V literatúre sa väčšinou uvádza iba finálny algoritmus na výpočet odhadov, tu skúsime uviesť, čo sa za tým algoritmom teoreticky dá hľadať. V tejto časti predpokladáme, že nemáme sezónnosť a trend je približne konštanta, t.j.  $Tr \approx \beta_0$  - „približne“ v takom zmysle, že s meniacim časom sa môže táto konštanta (trochu) meniť. Odhad tejto konštanty v čase  $t$  (budeme ho označovať  $a_t$ ) nájdeme použitím všetkých doterajších hodnôt minimalizáciou výrazu

$$g_t(\beta_0) \equiv (x_t - \beta_0)^2 + (1-\alpha)(x_{t-1} - \beta_0)^2 + (1-\alpha)^2(x_{t-2} - \beta_0)^2 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} (1-\alpha)^j (x_{t-j} - \beta_0)^2, \quad (5.14)$$

t.j. váženou metódou najmenších štvorcov, pričom váhy exponenciálne klesajú smerom do minulosti ( $\alpha \in (0, 1)$  je parameter tejto metódy - čím staršie pozorovanie, tým menší vplyv má na odhad  $\beta_0$ ). Pozornému čitateľovi iste neušlo, že sme použili naozaj všetky doterajšie hodnoty - dokonca aj tie, ktoré reálne nemáme ( $x_0, x_{-1}, \dots$ ) - v teoretických úvahách je ale „krajšie“ (a jednoduchšie) pracovať s týmito hodnotami a to, že ich nemáme riešiť až po odvodení.

Pomocou derivácie by sa ľahko ukázalo, že

$$a_t = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^j x_{t-j}, \quad (5.15)$$

<sup>4</sup>Namiesto „vyrovnávanie“ sa používa aj „zhladzovanie“, prípadne „vyhladzovanie“.

čiže ide o vážený priemer (váhy v súčte dávajú 1) hodnôt  $x_t, x_{t-1}, x_{t-2}, \dots$ . Môžeme si všimnúť, že

$$\begin{aligned} a_t &= \sum_{j=0}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^j x_{t-j} = \alpha x_t + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^j x_{t-j} = |\text{substitúcia } j = k + 1| \\ &= \alpha x_t + (1-\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha(1-\alpha)^k x_{t-1-k} = \alpha x_t + (1-\alpha) a_{t-1}, \end{aligned}$$

čiže  $a_t$  môžeme veľmi jednoducho počítať rekurentne - v podstate odhad  $\beta_0$  „aktualizujeme“ pomocou predchádzajúceho odhadu  $a_{t-1}$  a aktuálnej hodnoty  $x_t$ . Jediné, čo nám chýba je nejaké začiatkové  $a_1$ , na ktorého výpočet by sme ale potrebovali hodnoty  $x_0, x_{-1}, x_{-2}, \dots$ . V praxi sa to rieši tak, že za  $a_1$  sa položí  $x_1$  (ale sú aj iné metódy, napríklad zobrať priemer prvých niekoľko hodnôt).

Za odhad  $\widehat{X}_{n+k}^n$  (=odhad  $X_{n+k}$  pomocou hodnôt  $x_1, \dots, x_n$ ) sa potom zoberie najaktuálnejšia hodnota, ktorú máme, t.j.  $a_n$ . V čase  $t = 2, \dots, n$  vieme vypočítať aj chybu predikcie

$$\varepsilon_t = x_t - \widehat{X}_t^{t-1} = x_t - a_{t-1}. \quad (5.16)$$

Parameter  $\alpha$  sa potom volí tak, aby súčet štvorcov týchto chýb bol čo najmenší.

### Dvojité exponenciálne vyrovnávanie

Idea je v podstate taká istá ako v predchádzajúcom prípade - opäť nemáme sezonalitu, jedine o trende tentokrát predpokladáme, že je približne priamka, t.j.  $Tr_t \approx \beta_0 + \beta_1 t$ , kde  $\beta_0, \beta_1$  sa v čase „vyvíja“. Všetky odvodenia by boli analogické, takže uvedieme len „kuchársky postup“.

- Položíme  $s_1^{[1]} \equiv x_1$  a  $s_1^{[2]} \equiv x_1$  (to budú akési pomocné premenné).
- Pre  $t = 2, \dots, n$  položíme

$$\begin{aligned} s_t^{[1]} &= \alpha x_t + (1-\alpha) s_{t-1}^{[1]} \\ s_t^{[2]} &= \alpha s_t^{[1]} + (1-\alpha) s_{t-1}^{[2]}. \end{aligned}$$

- Odhad trendu v čase  $t$  je potom  $\widehat{Tr}_t = 2s_t^{[1]} - s_t^{[2]}$ .
- Odhad  $\widehat{X}_{n+k}^n$  dostaneme ako

$$\widehat{X}_{n+k}^n = 2s_n^{[1]} - s_n^{[2]} + \frac{\alpha}{1-\alpha} (s_n^{[1]} - s_n^{[2]}) \cdot k, \quad (5.17)$$

špeciálne  $\widehat{X}_t^{t-1} = 2s_{t-1}^{[1]} - s_{t-1}^{[2]} + \frac{\alpha}{1-\alpha} (s_{t-1}^{[1]} - s_{t-1}^{[2]})$  - to potrebujeme na výpočet predikčných chýb

$$\varepsilon_t = x_t - \widehat{X}_t^{t-1} \quad (5.18)$$

pre  $t = 2, \dots, n$ .

- Parameter  $\alpha$  zvolíme tak, aby súčet štvorcov predikčných chýb bol čo najmenší.

**Poznámka.** Existuje aj trojité exponenciálne vyrovnávanie, idea by bola opäť rovnaká, len by sa zobral polynóm druhého stupňa. V praxi ale často dostatočne dobre funguje aj dvojité (aj pri dátach, ktoré nemajú „priamkový tvar“ - tým, že koeficienty sa menia, tak táto metóda sa vie adaptovať aj komplikovanejšie funkcie, rovnako aj na zmeny charakteru v dátach).

## Dvojité exponenciálne vyrovnávanie - iná verzia<sup>5</sup>

Existuje aj druhá verzia exponenciálneho vyrovnávania - idea je podobná, avšak „aktualizácia“ koeficientov prebieha trochu iným spôsobom - algoritmus prebieha nasledovne:

- Položíme  $a_2 \equiv x_2$  a  $b_2 = x_2 - x_1$ .
- Pre  $t = 3, \dots, n$  položíme

$$\begin{aligned}a_t &= \alpha x_t + (1 - \alpha)(a_{t-1} + b_{t-1}) \\ b_t &= \beta(a_t - a_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1},\end{aligned}$$

kde  $\alpha, \beta \in (0, 1)$  sú parametre. Môžeme si to predstaviť tak, že v čase  $t - 1$  predpokladáme, že trend má tvar priamky prechádzajúcej bodom  $a_{t-1}$  so sklonom  $b_{t-1}$ . Očakávaná hodnota v čase  $t$  by potom bola  $a_{t-1} + b_{t-1}$  - to potom „vyvážime“ hodnotou  $x_t$ , čiže skutočnou hodnotou v čase  $t$  - z toho vzorec pre  $a_t$ . Ak už máme  $a_t$ , tak „skutočný“ sklon trendu v bode  $t$  je pri tomto pohľade  $a_t - a_{t-1}$  - ten zase „vyvážime“ predchádzajúcim sklonom  $b_{t-1}$ , pričom použijeme iné váhy. Technicky to teda pripomína jednoduché exponenciálne vyrovnávanie, kde sme mali  $a_t = \alpha x_t + (1 - \alpha)a_{t-1}$ , čiže tiež sme mali vážený priemer očakávanej a skutočnej hodnoty.

- Odhad trendu v čase  $t$  je  $\widehat{Tr}_t = a_t$ .
- Predikciu v čase  $n + k$  dostaneme ako  $\widehat{X}_{n+k}^n = a_n + kb_n$ .
- Parametre  $\alpha, \beta$  dostaneme minimalizáciou sumy štvorcov predikčných chýb.

## Holt-Wintersova metóda

Ide o zovšeobecnenie predchádzajúcej metódy s tým rozdielom, že sa okrem „lokálne priamkového trendu“ predpokladá aj sezonalita. Okrem priamkových koeficientov  $a_t$  a  $b_t$  sa teda pridá aj koeficient  $s_t$  pre sezonalitu. Koeficienty aktualizujeme podľa predpisov

$$\begin{aligned}a_t &= \alpha(x_t - s_{t-p}) + (1 - \alpha)(a_{t-1} + b_{t-1}) \\ b_t &= \beta(a_t - a_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1} \\ s_t &= \gamma(x_t - a_t) + (1 - \gamma)s_{t-p},\end{aligned}$$

kde  $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 1]$  sú parametre. Koeficienty  $a_t$  a  $b_t$  prepočítavame v podstate rovnako ako v predchádzajúcej metóde, jediný rozdiel je, že namiesto  $x_t$  použijeme hodnotu  $x_t - s_{t-p}$  (čiže ju „očistíme“ od sezónneho vplyvu). Hodnotu  $s_t$  aktualizujeme analogicky, čiže vážený priemer predchádzajúcej sezónnej hodnoty (preto je tam  $s_{t-p}$ ) a „aktuálnej“ sezónnej hodnoty  $x_t - a_t$  (skutočná hodnota mínus odhad trendu v čase  $t$ ). Na prepočet koeficientov potrebujeme aj nejaké štartovacie hodnoty  $a_0, b_0, s_0, s_{-1}, \dots, s_{-p+1}$  - tie môžeme zobrať napríklad tak, že na všetky dáta použijeme „regresný prístup“ (viď niekoľko strán dozadu) pričom trend zapíšeme ako priamku (R-ko to robí tak, že na  $a_0, b_0$  spraví iba obyčajnú priamkovú regresiu a  $s_0, s_{-1}, \dots, s_{-p}$  zoberie ako odhady z „jednoduchého prístupu“).

Ako už bolo naznačené, odhad trendu je v tejto metóde  $a_t$ , čiže „fitovaná“ hodnota časového radu je  $a_t + s_t$ . Odhad  $\widehat{X}_{n+k}^n$  získame ako

$$\widehat{X}_{n+k}^n = a_n + kb_n + s_{n+k-lp}, \quad (5.19)$$

kde  $l$  je najmenšie prirodzené číslo, pre ktoré platí  $n + k - lp < n$  (napr. ak robíme predikciu pre nejakú februárovú hodnotu, tak  $s_{n+k-pl}$  bude posledná februárová hodnota, ktorú máme vypočítanú). Parametre  $\alpha, \beta, \gamma$  opäť odhadujeme minimalizáciou súčtu štvorcov predikčných chýb.

---

<sup>5</sup>Táto je používanjšia.



## Stručne k multiplikatívnym modelom

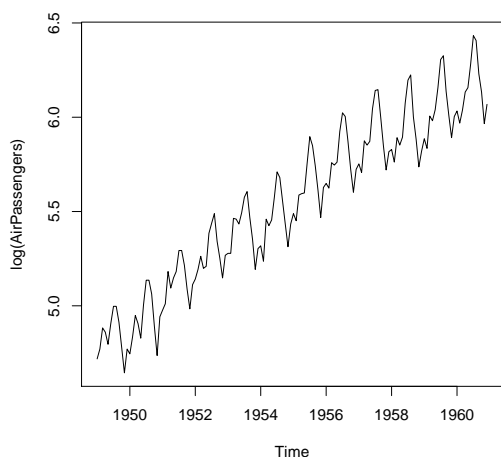
Doteraz sme predpokladali, že platí aditívny model

$$X_t = Tr_t + S_t + E_t. \quad (5.20)$$

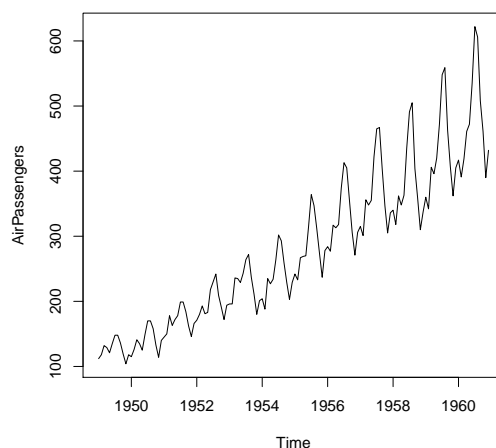
Niekedy ale lepšie popisuje dáta takzvaný multiplikatívny model

$$X_t = Tr_t \cdot S_t \cdot E_t. \quad (5.21)$$

Dá sa to rozoznať napríklad tak, že „sezónne výkyvy“ nie sú približne konštantné, ale výraznejšie sa menia - porovnaj napr. Obr. 9 a Obr. 10 - v prvom z nich sú tieto odchýlky približne konštantné, v druhom zjavne narastajú. V takejto situácii je najjednoduchším (a často postačujúcim) riešením



Obr. 9



Obr. 10

dáta zlogaritmovať - tým dostaneme opäť aditívny model (len s inými dátami)

$$\ln X_t = \ln Tr_t + \ln S_t + \ln E_t. \quad (5.22)$$

V prípade, že takúto operáciu spraviť nechceme (alebo nevieme kvôli záporným číslam), existujú multiplikatívne alternatívy k vyššie spomenutým metódam - spomenieme aspoň multiplikatívnu Holt-Wintersovu metódu. Ideovo funguje úplne tak isto, rozdiely sú jedine

- v prepočte parametrov

$$\begin{aligned} a_t &= \alpha \frac{x_t}{s_{t-p}} + (1 - \alpha)(a_{t-1} + b_{t-1}) \\ b_t &= \beta(a_t - a_{t-1}) + (1 - \beta)b_{t-1} \\ s_t &= \gamma \frac{x_t}{a_t} + (1 - \gamma)s_{t-p}, \end{aligned}$$

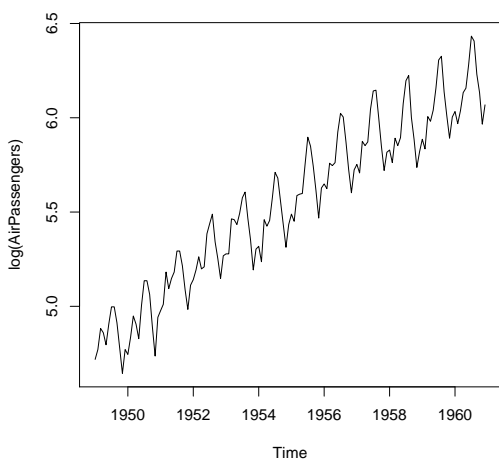
- v odhade  $\hat{X}_{n+k}^n$ , ktorý je v tomto prípade daný predpisom

$$\hat{X}_{n+k}^n = (a_n + kb_n)s_{n+k-lp}, \quad (5.23)$$

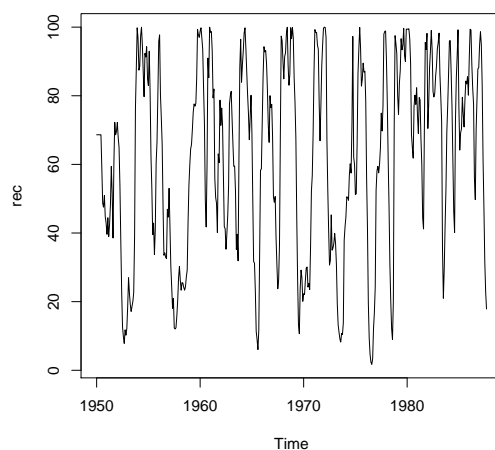
kde  $l$  je rovnaké ako v aditívnej verzii.

## 6 Spektrálna analýza

Počas tohto a aj minulého semestra sme sa viackrát stretli s dátami, ktoré mali periodický charakter. Typickým príkladom boli napríklad dáta `AirPassengers` (viď Obr. 11), kde zjavne vidíme, že každých 12 mesiacov je v časovom rade veľmi podobný (takmer rovnaký) vzor. V tomto prípade je periodické opakovanie očividné, avšak v praxi sa často môžeme stretnúť aj s dátami, kde síce „cítíme“, že nejaká periodicita tam je, avšak na prvý pohľad nie je zjavný ani opakujúci sa vzor a niekedy ani dĺžka cyklu (tú často iba „tušíme“ z typu dát - napríklad 12 pri mesačných dátach a podobne) - viď napr. dáta na Obr. 12 (v R-ku sú dáta v balíčku `astsa` uložené do premennej `rec` - dáta súvisia s mesačným počtom „prírastkov“ rýb, nejaké ďalšie informácie sa v R-ku dajú získať cez príkaz `?rec`).

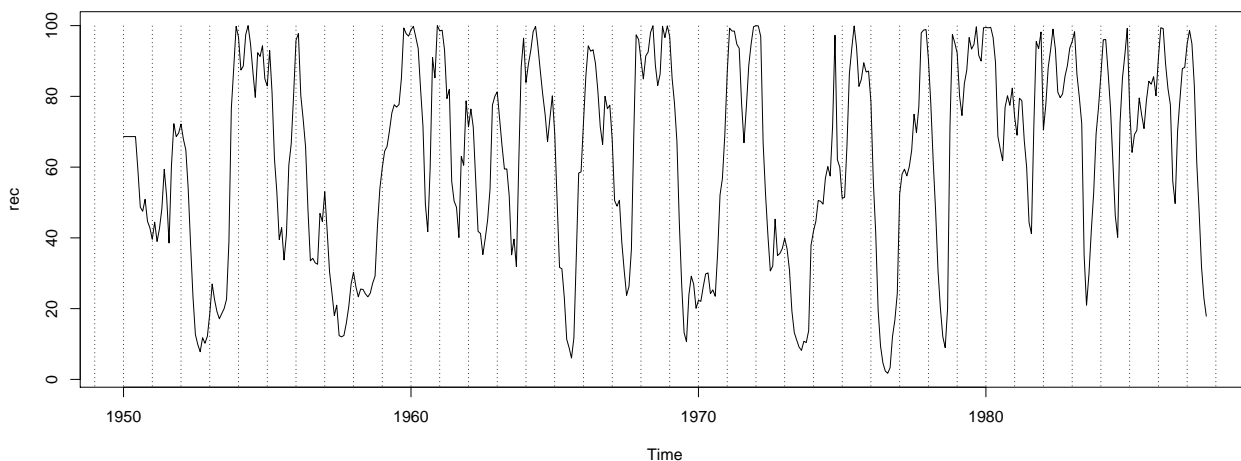


Obr. 11



Obr. 12

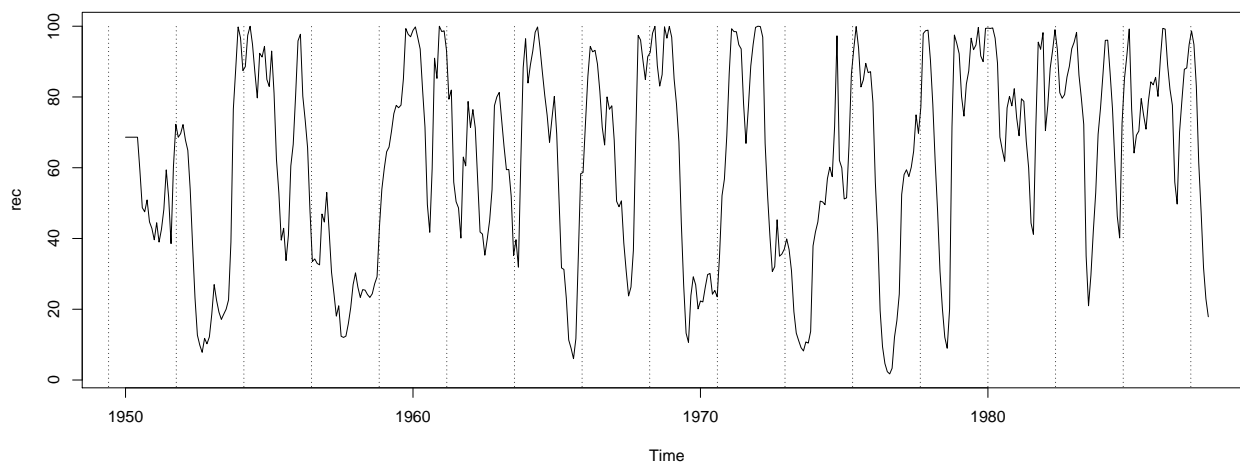
Dôvodom tejto nejasnosti môže byť jednak väčšia náhodnosť (väčší šum), ale aj to, že v dátach sú nejakým spôsobom pokombinované cykly rôznych dĺžok. V dátach z Obr. 12 sa napríklad pri istej miere prižmúrenia očí a autosugescie dajú vidieť podobné vzory každých 12 mesiacov, viď Obr. 13 - vo väčšine „okienok“ môžeme pozorovať „v-čkový“ tvar (najprv pokles, potom rast). Všetko je samozrejme výrazne poznačené náhodnosťou, takže veľkosť a tvar tohto vzoru sa v jednotlivých výsekoch líši, niekde dokonca ani nie je. Istá forma periodicity sa dá ale vidieť napríklad aj pri



Obr. 13

každom približne dvadsiatom ôsmom mesiaci, viď Obr. 14. Opäť treba výrazne „prižmúriť oči“,

ale napríklad v druhom a štvrtom výseku vidno podobný vzor, ktorý sa dá v zmenšených a mierne deformovaných podobách nájsť aj vo viacerých ďalších výsekoch.



Obr. 14

Tieto dáta by sa iste dali „rozsekať“ aj na iné šírky ako dve vyššie spomenuté a možno by sme v niektorých prípadoch opäť videli čiastočne opakujúce sa vzory - v niektorých možno lepšie, v iných zase horšie. Určovať to ale iba z obrázka je ale takmer čisto subjektívne - na to, aby sme napríklad vedeli porovnať, či lepšie periodicitu opisuje delenie na Obr. 13, alebo je lepšie delenie z Obr. 14, potrebujeme nejaký objektívny nástroj, ktorý vhodne kvantifikuje ako veľmi sa cyklus danej dĺžky v časovom rade vyskytuje - na to slúži práve spektrálna analýza<sup>6</sup>.

V spektrálnej analýze sa síce namiesto dĺžok cyklov pracuje s frekvenciami, ale je to v podstate ekvivalentná informácia - napríklad ak máme frekvenciu 4 cykly za rok, tak z toho vieme, že dĺžka jedného cyklu je  $\frac{1}{\text{frekvencia}} = \frac{1}{4}$  roka a naopak, ak sa niečo opakuje napríklad v päťročných cykloch, tak cykly majú frekvenciu  $\frac{1}{5} = 0.2$  cyklu za rok. V súvislosti so spektrálnou analýzou sa používa aj výraz „frequency domain (time-series) analysis“ (slušný preklad nepoznám), naopak to, čomu sme sa venovali doteraz (SARIMA modely, (G)ARCH, regresia, dekompozícia) sa spája s výrazom „time domain analysis“ - čiže doteraz nás zaujímalo skôr to, čo sa deje „v čase“, v spektrálnej analýze nás zaujíma skôr to, čo sa deje „vo frekvenciách“. Tieto veci sú samozrejme previazané, ide tu skôr o iný pohľad na vec.

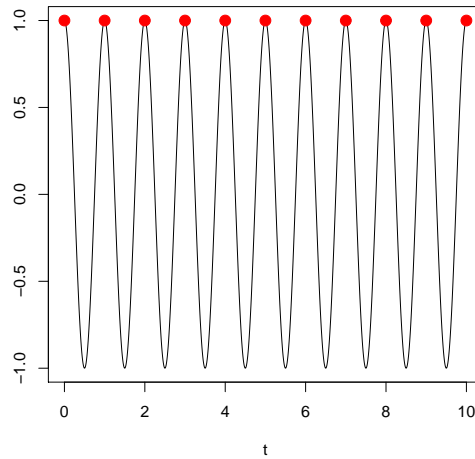
Okrem toho, že spektrálna analýza nám vie pomôcť v „odhaľovaní“ periodickej štruktúry (napr. ak nevieme, aké  $s$  zvoliť v SARIMA( $p, d, q$ )  $\times$  ( $P, D, Q$ ) $_s$  modeli), v niektorých oblastiach (napríklad pri analyzovaní zvukových signálov) nás môžu frekvencie zaujímať viac ako samotné hodnoty časového radu - napríklad podľa toho, v akých frekvenciách „hučí“ elektrický motor sa dá potenciálne zistiť, či je pokazený; v hudbe zase frekvencie určujú výšku tónu; skúmanie frekvencií má využitie aj pri rozpoznávaní reči.

Základným nástrojom v spektrálnej analýze sú funkcie kosínus a sínus. Najskôr zopár poznámok na pripomenutie, respektíve ujasnenie si niektorých faktov.

1. Funkcia  $\cos t$  má periódu  $2\pi$  (časových jednotiek), t.j. frekvenciu  $\frac{1}{2\pi}$  za jednotku času. Z toho ľahko odvodíme, že pre nejaké číslo  $k > 0$  má funkcia  $\cos(kt)$  periódu  $\frac{2\pi}{k}$  (teda frekvenciu  $\frac{k}{2\pi}$ ), špeciálne pre nejaké  $\lambda > 0$  má funkcia  $\cos(2\pi\lambda t)$  periódu  $\frac{1}{\lambda}$ , t.j. frekvenciu  $\lambda$ . Rovnaké platí aj pre funkciu  $\sin(2\pi\lambda t)$  - s takýmito funkciami budeme najčastejšie pracovať, keďže v nich je jasne vyjadrená frekvencia funkcie. Z matematického hľadiska môžeme pripustiť aj záporné hodnoty  $\lambda$  (v teoretických výpočtoch to pomôže, v praktických to v konečnom dôsledku „neuškodí“).

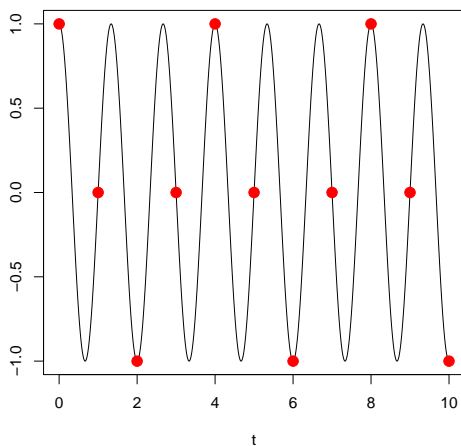
<sup>6</sup>Toto je samozrejme trochu zjednodušený pohľad, ale pre začiatok je dobré mať takúto predstavu.

2. Tým, že časový rad pozorujeme iba v diskretných časoch  $t \in \mathbb{Z}$ , nie sme schopní pozorovať frekvencie väčšie ako  $\frac{1}{2}$  (alebo inými slovami - aby malo pre nás zmysel v diskretnom čase hovoriť o cykle, musí mať cyklus dĺžku aspoň 2). Napríklad periodická funkcia na Obr. 15 má frekvenciu 1, avšak v diskretnom čase vidíme iba červené body, čiže konštantnú hodnotu - nemá teda zmysel hovoriť o cykle. Podobne na Obr. 16 je periodická funkcia s frekvenciou

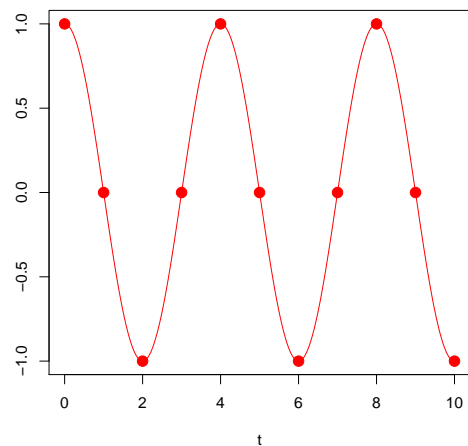


Obr. 15

$\frac{3}{4}$ , avšak reálne vidíme iba červené body (opakujúce sa každý štvrtý časový okamih), čo vieme identifikovať iba ako funkciu s frekvenciou  $\frac{1}{4}$  (dĺžka cyklu 4 - vid' Obr. 17). Do tých červených bodov by sme si samozrejme vedeli predstaviť aj periodickú funkciu s frekvenciou  $\frac{3}{4}$  - problém je, že rovnako by sme tam vedeli „napasovať“ aj funkciu s frekvenciou  $\frac{6}{4}, \frac{9}{4}, \dots$  - z tohto hľadiska je „férové“ nepredstavovať si k tým bodom cykly navyše. V časových



Obr. 16



Obr. 17

radoch budeme teda pracovať iba s hodnotami  $\lambda \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ . V prípade, že by sme mali náhodný proces so spojitým časom, sme schopní pozorovať ľubovoľné frekvencie, t.j. má zmysel uvažovať  $\lambda \in (-\infty, \infty)$ . Vo väčšine teoretických odvodení nám je jedno, či máme časový rad, alebo náhodný proces so spojitým časom - jediný rozdiel bude práve v týchto hraniciach pre  $\lambda$ . Kto teda chce, môže si v nasledovnom namiesto „časový rad“ predstavovať „náhodný proces so spojitým časom“.

3. Ohraničenie  $\lambda \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  sa viaže na najmenšiu jednotku času, ktorú pozorujeme - preto ak máme napríklad mesačné dáta, tak je v poriadku hovoriť o frekvencii 4 ( $> \frac{1}{2}$ ) cykly za rok, lebo vzhľadom na mesiace je táto frekvencia  $\lambda = \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2}$ .
4. V literatúre sa často namiesto  $\cos(2\pi\lambda t)$  a  $\sin(2\pi\lambda t)$  pracuje s funkciami  $\cos(\lambda t)$  a  $\sin(\lambda t)$  (a  $\lambda$  sa potom berie z intervalu  $[-\pi, \pi]$ ) - v matematických odvozeniach to nespraví žiaden významný rozdiel, ale  $\lambda$  má v tomto prípade iný význam (už to nie je frekvencia cyklov za jednotku času, ale za  $2\pi$  jednotiek času) - my ostaneme pri  $\cos(2\pi\lambda t)$  a  $\sin(2\pi\lambda t)$  (- to len pre istotu, kebyže na niečo také narazíte).

### Časové rady s diskretným spektrom

V úvode sme spomínali, že v časových radoch sú často pokombinované cykly rôznej dĺžky - pre predstavu, ako takéto pokombinovanie môže vyzeráť uvažujme najprv model

$$X_t = \sum_{j=1}^2 (A_j \cos(2\pi\lambda_j t) + B_j \sin(2\pi\lambda_j t)), \quad (6.1)$$

kde  $A_j, B_j, j = 1, 2$  sú náhodné premenné, pre ktoré platí

- $E(A_j) = E(B_j) = 0$  pre  $j = 1, 2$ ,
- $D(A_j) = D(B_j)$  pre  $j = 1, 2$ , túto hodnotu označíme  $\sigma_j^2$ ,
- všetky náhodné premenné sú navzájom nekorelované, t.j.  $E(A_1 A_2) = E(B_1 B_2) = E(A_1 B_2) = E(B_1 A_2) = 0$  (stačí stredná hodnota súčinu, lebo vo všeobecnosti  $Cov(A, B) = E(AB) - E(A)E(B)$ , pričom u nás je druhý člen nulový).

Okrem toho predpokladáme, že  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Nezaškodí uvedomiť si, že funkcia

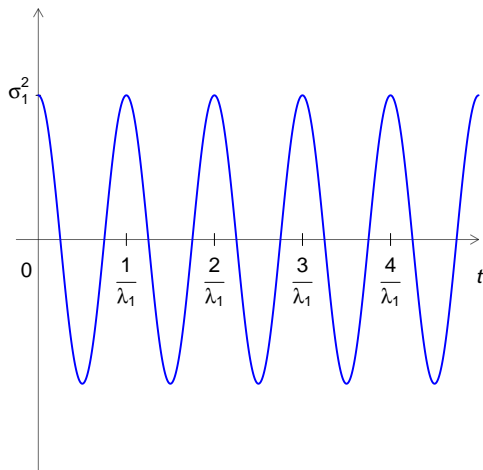
$$A_j \cos 2\pi\lambda_j t + B_j \sin 2\pi\lambda_j t$$

je periodická s frekvenciou  $\lambda_j$  bez ohľadu na to, aké je  $A_j, B_j$  - v konečnom dôsledku je teda funkcia v (6.1) súčet dvoch periodických funkcií s rôznymi frekvenciami - občas sa tomu povie, že má „kvázi-periodický charakter“. Pre strednú hodnotu takéhoto procesu zjavne platí  $E(X_t) = 0$ . Pre autokovariančnú funkciu máme

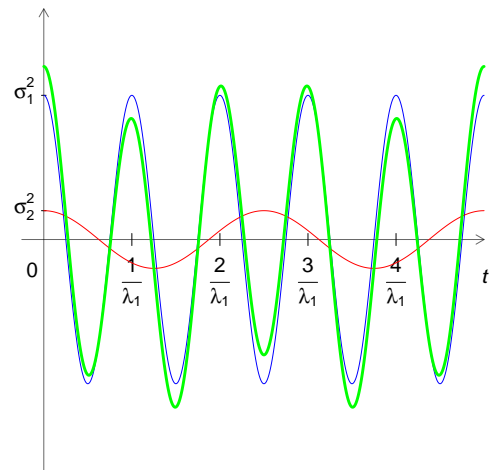
$$\begin{aligned} \gamma(t, t+h) &= Cov(X_t, X_{t+h}) = E(X_t X_{t+h}) - E(X_t)E(X_{t+h}) = E(X_t X_{t+h}) = |\text{nekorelovanosť}| = \\ &= \sum_{j=1}^2 (E(A_j^2) \cos(2\pi\lambda_j t) \cos(2\pi\lambda_j(t+h)) + E(B_j^2) \sin(2\pi\lambda_j t) \sin(2\pi\lambda_j(t+h))) = \\ &= |\text{lebo } E(A_j^2) = E(B_j^2) = \sigma_j^2| = \\ &= \sum_{j=1}^2 \sigma_j^2 (\cos(2\pi\lambda_j t) \cos(2\pi\lambda_j(t+h)) + \sin(2\pi\lambda_j t) \sin(2\pi\lambda_j(t+h))) = \\ &= |\text{goniometrický vzorec (kosínus rozdielu uhlov)}| = \\ &= \sum_{j=1}^2 \sigma_j^2 \cos(2\pi\lambda_j(t - (t+h))) = \sum_{j=1}^2 \sigma_j^2 \cos(2\pi\lambda_j(-h)) = \sum_{j=1}^2 \sigma_j^2 \cos(2\pi\lambda_j h) \end{aligned}$$

(posledná rovnosť, lebo kosínus je párna funkcia). Vidíme, že táto funkcia závisí iba od  $h$ , takže  $X$  je stacionárny proces s autokovariančnou funkciou

$$\gamma(h) = \sum_{j=1}^2 \sigma_j^2 \cos(2\pi\lambda_j h). \quad (6.2)$$



Obr. 18



Obr. 19

Môžeme si všimnúť, že funkcia  $\sigma_j^2 \cos(2\pi\lambda_j h)$  je opäť periodická s frekvenciou  $\lambda_j$ , t.j. periódou  $\frac{1}{\lambda_j}$  (viď Obr. 18) a autokovariančná funkcia je súčet dvoch periodických funkcií.

Ak by platilo, že  $\sigma_1^2 \gg \sigma_2^2$  (výrazne väčšie), tak v autokovariančnej funkcii sa najviac „prejaví“ funkcia  $\sigma_1^2 \cos(2\pi\lambda_1 h)$ , ktorá nadobúda maximá pre  $h = \frac{1}{\lambda_1}, \frac{2}{\lambda_1}, \frac{3}{\lambda_1}, \dots$  (viď Obr. 19 - modrou je zobrazená funkcia  $\sigma_1^2 \cos(2\pi\lambda_1 h)$  a červenou  $\sigma_2^2 \cos(2\pi\lambda_2 h)$ ); zelenou je zobrazený ich súčet, t.j.  $\gamma(h)$ . Kovariancia (a teda aj korelácia) medzi bodmi vzdialenými o násobky  $\frac{1}{\lambda_1}$  bude teda vysoká, čo spôsobí, že v časovom rade (6.1) budeme pravdepodobne vidieť nejakú periodicitu s frekvenciou  $\lambda_1$ . Naopak, ak  $\sigma_1^2 \ll \sigma_2^2$ , prejaví sa skôr periodicitu s frekvenciou  $\lambda_2$ . Ak  $\sigma_1^2 \approx \sigma_2^2$ , tak sa môže stať (aj v závislosti od  $\lambda_1, \lambda_2$ ), že v nejakej miere uvidíme obidve frekvencie, ale aj to, že funkcie  $\sigma_1^2 \cos(2\pi\lambda_1 h)$  a  $\sigma_2^2 \cos(2\pi\lambda_2 h)$  pôjdu „proti sebe“ (čiastočne sa budú vynulovávať) a konkrétna periodicitu sa bude hľadať ťažšie.

Časový rad (6.1), výpočet jeho autokovariančnej funkcie a aj hlavnú ideu by sme pre nejaké prirodzené číslo  $l$  (za nejakých podmienok aj  $l = \infty$ ) ľahko vedeli zovšeobecniť na prípad

$$X_t = \sum_{j=1}^l (A_j \cos(2\pi\lambda_j t) + B_j \sin(2\pi\lambda_j t)) \quad (6.3)$$

(stredné hodnoty, disperzie, nekorelovanosť by bola rovnaká ako v (6.1)), ktorý by mal kovariančnú funkciu

$$\gamma(h) = \sum_{j=1}^l \sigma_j^2 \cos(2\pi\lambda_j h). \quad (6.4)$$

Pre správanie takéhoto časového radu sú opäť kľúčové hodnoty  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  a  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_l^2$ . V takomto prípade hovoríme, že časový rad (6.3) má konečné (diskrétne) spektrum  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$ .

Časom ukážeme, že každý stacionárny proces vieme zapísať analogicky ako v (6.3) - väčšinou nám ale nebude stačiť diskrétne spektrum (budeme potrebovať spojité) a namiesto sumy budeme potrebovať nejaký integrál.

## Spektrálna distribučná funkcia

Aby sme v dlhodobom horizonte lepšie pochopili prechod k spojitému spektru, poďme ešte poupraviť výrazy (6.3) a (6.4) do trochu inej podoby. V komplexných číslach platí, že

$$e^{2\pi i \lambda t} = \cos(2\pi \lambda t) + i \sin(2\pi \lambda t),$$

z čoho ľahko vieme vyjadriť

$$\begin{aligned}\cos(2\pi\lambda t) &= \frac{e^{2\pi i\lambda t} + e^{-2\pi i\lambda t}}{2}, \\ \sin(2\pi\lambda t) &= \frac{e^{2\pi i\lambda t} - e^{-2\pi i\lambda t}}{2i}.\end{aligned}$$

Po dosadení do (6.3) dostaneme

$$\begin{aligned}X_t &= \sum_{j=1}^l (A_j \cos(2\pi\lambda_j t) + B_j \sin(2\pi\lambda_j t)) = \sum_{j=1}^l \left( A_j \frac{e^{2\pi i\lambda_j t} + e^{-2\pi i\lambda_j t}}{2} + B_j \frac{e^{2\pi i\lambda_j t} - e^{-2\pi i\lambda_j t}}{2i} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^l \left( e^{2\pi i\lambda_j t} \left( \frac{A_j}{2} - i\frac{B_j}{2} \right) + e^{-2\pi i\lambda_j t} \left( \frac{A_j}{2} + i\frac{B_j}{2} \right) \right),\end{aligned}$$

kde sme využili, že  $\frac{1}{i} = -i$ . Ak pre  $j = 1, \dots, l$  položíme  $Z_j \equiv \frac{A_j}{2} - i\frac{B_j}{2}$ ,  $Z_{-j} \equiv \overline{Z}_j = \frac{A_j}{2} + i\frac{B_j}{2}$  a  $\lambda_{-j} \equiv -\lambda_j$ , dostávame vzťah

$$X_t = \sum_{\substack{j=-l \\ j \neq 0}}^l Z_j e^{2\pi i\lambda_j t}. \quad (6.5)$$

Môžeme si všimnúť, že  $Z_j$  sú komplexné náhodné premenné - je možné, že s takýmito ste sa ešte nestretli, tak aspoň stručne. Ak  $Z = X + iY$  ( $X, Y$  sú nejaké náhodné premenné), tak

- $\overline{Z} \equiv X - iY$  (komplexne združená náhodná premenná - rovnako ako v komplexných číslach),
- $E(Z) \equiv E(X) + iE(Y)$ ,
- $D(Z) \equiv E(Z\overline{Z}) - E(Z)E(\overline{Z}) = D(X) + D(Y)$ ,
- ak  $W$  je nejaká komplexná náhodná premenná, tak  $Cov(W, Z) = E(W\overline{Z}) - E(W)E(\overline{Z})$ .

V našom prípade

- $E(Z_j) = E\left(\frac{A_j}{2} - i\frac{B_j}{2}\right) = \frac{1}{2}E(A_j) - \frac{i}{2}E(B_j) = 0$  pre  $j = 1, \dots, l$  a pre záporné  $j$  analogicky,
- $D(Z_j) = D\left(\frac{A_j}{2}\right) + D\left(-\frac{B_j}{2}\right) = \frac{1}{4}D(A_j) + \frac{1}{4}D(B_j) = \frac{\sigma_j^2}{2}$ , pre  $j = \pm 1, \dots, \pm l$ , pričom sme položili  $\sigma_{-j}^2 \equiv \sigma_j^2$ ,
- pre  $|j| \neq |k|$  máme  $Cov(Z_j, Z_k) = E(Z_j\overline{Z}_k) - E(Z_j)E(\overline{Z}_k) = E(Z_j\overline{Z}_k) = 0$  (lebo by sme dostali nejakú lineárnu kombináciu hodnôt  $E(A_j A_k)$ ,  $E(A_j B_k)$ ,  $E(A_k B_j)$ ,  $E(B_j B_k)$ , ktoré sú všetky nulové),
- špeciálne

$$\begin{aligned}E(Z_j\overline{Z}_{-j}) &= E(Z_j Z_j) = E\left(\left(\frac{1}{2}A_j - i\frac{1}{2}B_j\right)^2\right) = E\left(\frac{1}{4}A_j^2 - i\frac{1}{2}A_j B_j + i^2\frac{1}{4}B_j^2\right) = \\ &= \frac{1}{4}E(A_j^2) - \frac{1}{2}E(A_j B_j) - \frac{1}{4}E(B_j^2) = \frac{1}{4}\sigma_j^2 - \frac{1}{4}\sigma_j^2 = 0.\end{aligned}$$

Podobne vieme vzťah (6.4) zapísať ako

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= \sum_{j=1}^l \sigma_j^2 \cos(2\pi\lambda_j h) = \sum_{\substack{j=-l \\ j \neq 0}}^l \frac{\sigma_j^2}{2} \cos(2\pi\lambda_j h) \quad (\text{lebo } \cos(2\pi\lambda_j h) = \cos(-2\pi\lambda_j h) = \cos(2\pi\lambda_{-j} h)) \\ &= \sum_{\substack{j=-l \\ j \neq 0}}^l \frac{\sigma_j^2}{2} (\cos(2\pi\lambda_j h) + i \sin(2\pi\lambda_j h)) \quad (\text{sínus je nepárna, takže } \sin(2\pi\lambda_j h) + \sin(2\pi\lambda_{-j} h) = 0) \\ &= \sum_{\substack{j=-l \\ j \neq 0}}^l \frac{\sigma_j^2}{2} e^{2\pi i \lambda_j h}.\end{aligned}$$

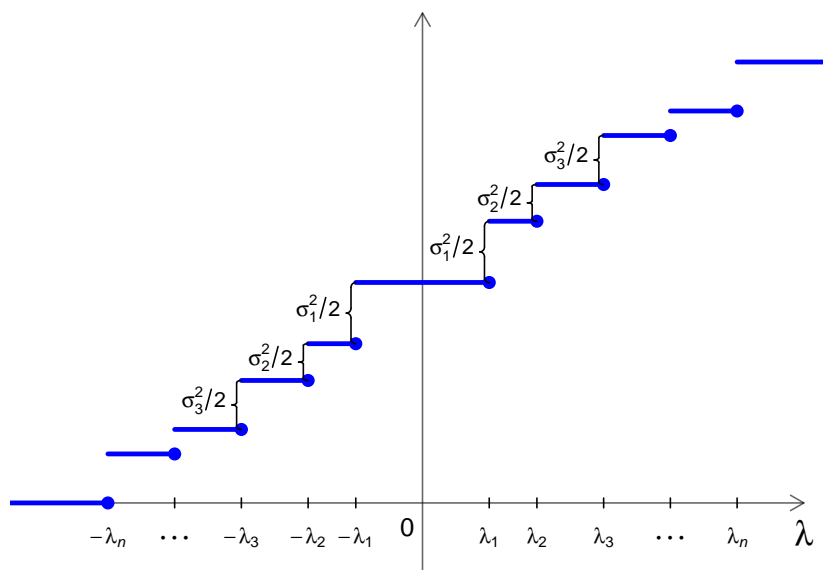
To sa dá zapísať aj ako

$$\gamma(h) = \sum_{\substack{j=-l \\ j \neq 0}}^l \frac{\sigma_j^2}{2} e^{2\pi i \lambda_j h} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i \lambda h} dF(\lambda), \quad (6.6)$$

kde  $F(\lambda)$  je takzvaná **spektrálna distribučná funkcia** definovaná (v tomto prípade) predpisom

$$F(\lambda) = \sum_{\{j: \lambda_j < \lambda\}} \frac{\sigma_j^2}{2} \quad (6.7)$$

(o všeobecnom prípade o kúsok neskôr). Ako už aj názov (a predpis a Obr. 20) napovedá, ide o akúsi



Obr. 20: Príklad spektrálnej distribučnej funkcie (modrou farbou) za predpokladu  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ .

analógiu distribučnej funkcie náhodnej premennej. Ak sme mali diskretnú náhodnú premennú  $Y$  nadobúdajúcu hodnoty  $y_1 < y_2 < \dots$  s pravdepodobnosťami  $p_1, p_2, \dots$ , tak jej distribučná funkcia  $G(y) = P(Y < y)$  pre nejaké  $y \in \mathbb{R}$  sa dala písať ako

$$G(y) = \sum_{\{j: y_j < y\}} p_j,$$

čiže celková pravdepodobnosť tých bodov, ktoré sú menšie ako  $y$ . Podobne spektrálna distribučná funkcia v bode  $\lambda \in \mathbb{R}$  nám hovorí, aká je akási celková „sila“ tých frekvencií, ktoré sú menšie



ako  $\lambda$ . Rovnako ako v časovom rade (6.1), aj tu platí, že čím je nejaké  $\sigma_j^2$  väčšie, tým skôr sa prejaví periodicita s frekvenciou  $\lambda_j$ , preto som  $\sigma_j^2/2$  nazval „sila“ frekvencie  $\lambda_j$  - inak to nie je žiadny oficiálny terminus technicus. Spektrálna distribučná funkcia má veľmi podobné vlastnosti ako distribučná funkcia náhodnej premennej - je neklesajúca, zľava spojitá a  $F(\lambda) \rightarrow 0$  ak  $\lambda \rightarrow -\infty$ . Jediný rozdiel je, že pre  $\lambda \rightarrow \infty$  neplatí  $F(\lambda) \rightarrow 1$ , ale

$$F(\lambda) \rightarrow \sum_{\substack{j=-l \\ j \neq 0}}^l \frac{\sigma_j^2}{2} = \sum_{j=1}^l \sigma_j^2 = \gamma(0).$$

Ešte pár (väčší pár) slov k výrazu (6.6), resp. k tomu ako sme došli k integrálu

$$\gamma(h) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i \lambda h} dF(\lambda).$$

(Aby neskôr nevznikol príliš veľký chaos v písmenkách, namiesto  $\lambda$  budeme teraz používať „klasické“  $x$ ). Ide o Riemannov-Stieltjesov integrál, čo je zovšeobecnenie Riemannovho integrálu. Prípoňme z Matematickej analýzy (2), že ak sme chceli spočítať Riemannov integrál nejakej funkcie  $g$  v hraniciach od  $-\frac{1}{2}$  do  $\frac{1}{2}$  (čo bola plocha pod funkciou  $g$  na intervale  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ), tak teoretický postup bol približne nasledovný:

1. Zobrali sme nejaké delenie  $D_n = \left(-\frac{1}{2} = x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_n^{(n)} = \frac{1}{2}\right)$  intervalu  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  (nie je to nutné, ale pre jednoduchosť teraz predpokladajme, že toto delenie je rovnomerné na  $n-1$  dielikov rovnakej dĺžky).

2. Spočítali sme výraz

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}\right) g\left(x_k^{(n)}\right),$$

čiže súčet plôch obdĺžnikov so „základňou“  $[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}]$  a výškou  $g(x_k^{(n)})$  - vid' Obr. 21. Čím bolo delenie jemnejšie (čiže menšie „dieliky“, čiže pri rovnomernom delení väčšie  $n$ ), tým lepšie súčet plôch týchto obdĺžnikov aproximoval skutočnú plochu pod funkciou  $g$ .

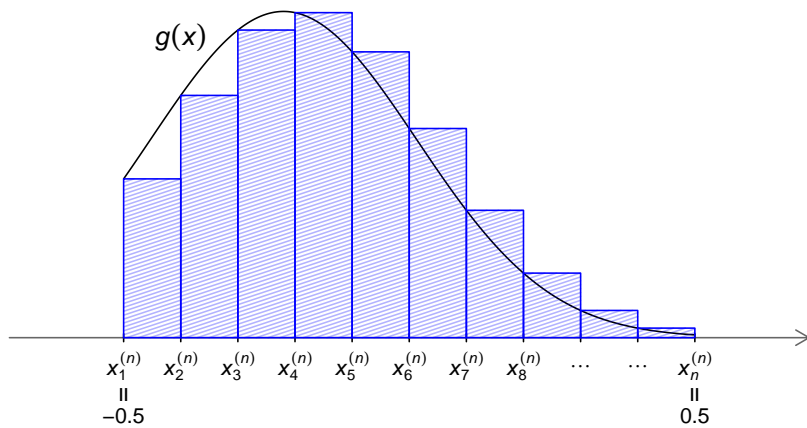
3. Skutočnú plochu sme teda dostali ako

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}\right) g\left(x_k^{(n)}\right).$$

Riemannov-Stieltjesov integrál funguje úplne analogicky, jediný rozdiel je, že v tomto prípade šírku základne  $[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}]$  nemeríme štandardnou Lebesgueovou mierou (čiže ako  $x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}$ ), ale takzvanou  $F$ -mierou (mierou danou funkciou  $F$ ), čiže ako  $F(x_{k+1}^{(n)}) - F(x_k^{(n)})$ . Miera takéhoto intervalu môže byť aj nulová - stačí ak je funkcia  $F$  na intervale  $[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}]$  konštantná (záporná byť nemôže, lebo  $F$  je neklesajúca). Ak je  $F$  taká ako na Obr. 20, tak  $F(x_{k+1}^{(n)}) - F(x_k^{(n)})$  je nulové vtedy, keď  $\lambda_j < x_k^{(n)} < x_{k+1}^{(n)} < \lambda_{j+1}$  a nenulové vtedy, keď  $x_k^{(n)} \leq \lambda_j \leq x_{k+1}^{(n)}$  pre nejaké  $j$ .

Majme dostatočne jemné delenie v takom zmysle, že v každom z intervalov  $[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}]$  je nanajvýš jedno  $\lambda_j$  a označme  $k_j$  ten index, pre ktorý platí  $\lambda_j \in [x_{k_j}^{(n)}, x_{k_j+1}^{(n)}]$ ,  $j = \pm 1, \dots, \pm l$ . Potom dostávame, že

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(F\left(x_{k+1}^{(n)}\right) - F\left(x_k^{(n)}\right)\right) g\left(x_k^{(n)}\right) = \sum_{\substack{j=-l \\ j \neq 0}}^l \underbrace{\left(F\left(x_{k_j+1}^{(n)}\right) - F\left(x_{k_j}^{(n)}\right)\right)}_{\frac{\sigma_j^2}{2}} g\left(x_{k_j}^{(n)}\right) = \sum_{\substack{j=-l \\ j \neq 0}}^l \frac{\sigma_j^2}{2} g\left(x_{k_j}^{(n)}\right).$$



Obr. 21: „Medzivýpočet“ pri Riemannovom integráli.

Zjavne pre  $n \rightarrow \infty$  platí  $x_{k_j}^{(n)} \rightarrow \lambda_j$  (lebo pre  $n \rightarrow \infty$  ide šírka intervalu  $[x_{k_j}^{(n)}, x_{k_{j+1}}^{(n)}]$  do nuly a zároveň pre každé  $n$  tento interval obsahuje  $\lambda_j$ ), takže pre  $g(x) = e^{2\pi i x h}$  dostávame

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i x h} dF(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left( F(x_{k+1}^{(n)}) - F(x_k^{(n)}) \right) e^{2\pi i x_k^{(n)} h} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\substack{j=-l \\ j \neq 0}}^l \frac{\sigma_j^2}{2} e^{2\pi i x_{k_j}^{(n)} h} = \\ &= \sum_{\substack{j=-l \\ j \neq 0}}^l \frac{\sigma_j^2}{2} e^{2\pi i \lambda_j h} = \gamma(h). \end{aligned}$$

**Poznámka** (úplne mimo tohto predmetu, ale škoda to v tomto kontexte nespomenúť). Ak by  $F$  bola distribučná funkcia nejakej náhodnej premennej  $Y$ , tak výraz  $F(x_{k+1}^{(n)}) - F(x_k^{(n)})$  je to isté, čo  $P(Y \in [x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}])$ . Ak by bola  $Y$  diskrétna, nadobúdajúca hodnoty  $y_1, y_2, \dots$  s pravdepodobnosťami  $p_1, p_2, \dots$ , tak analogicky ako vyššie by sme pre ľubovoľnú rozumnú funkciu  $g$  dostali

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y) dF(y) = \sum_{j=1}^{\infty} p_j g(y_j) = E(g(Y)).$$

Špeciálne pre  $g(y) = y$  dostávame vzťah (s ktorým ste sa už zrejme stretli)

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y dF(y).$$

**Poznámka** (k Riemannovmu-Stieltjesovmu integrálu vo všeobecnosti). Ak by mala funkcia  $F$  hustotu  $f$  voči Lebesgueovej miere (čiže „klasickú“ hustotu - naša spektrálna distribučná funkcia nemala), tak výraz  $F(x_{k+1}^{(n)}) - F(x_k^{(n)})$  by sa dal vyjadriť ako

$$\int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} f(x) dx$$

(to je jednoduchá vlastnosť hustoty, lebo  $f$  je definovaná ako funkcia splňajúca  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx$ ), a teda Riemann-Stieltjesov integrál vieme písať ako

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(x)dF(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left( F(x_{k+1}^{(n)}) - F(x_k^{(n)}) \right) g(x_k^{(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} f(x)dx \cdot g(x_k^{(n)}) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} f(x)g(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)g(x)dx. \end{aligned}$$

Za poslednou rovnosťou sa ešte skrýva relatívne veľa roboty<sup>7</sup>, ale idea je taká, že čím väčšie  $n$ , tým sú intervaly  $[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}]$  užšie, teda tým lepšia je aproximácia

$$\int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} f(x)g(x) dx \approx \int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}} f(x)g(x) dx$$

a z toho už jednoducho

$$\int_{x_1^{(n)}}^{x_2^{(n)}} f(x)g(x)dx + \int_{x_2^{(n)}}^{x_3^{(n)}} f(x)g(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}^{(n)}}^{x_n^{(n)}} f(x)g(x)dx = \int_{x_1^{(n)}}^{x_n^{(n)}} f(x)g(x)dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)g(x)dx.$$

Hranice  $-\frac{1}{2}$  a  $\frac{1}{2}$  samozrejme možno nahradiť ľubovoľnými  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Nasledujúca veta hovorí, že zápis autokovariančnej funkcie pomocou spektrálnej distribučnej funkcie a Riemannovho-Stieltjesovho integrálu v (6.6) nie je „výsadou“ iba špeciálnych časových radov tvaru (6.3), ale že takto vieme zapísať autokovariančnú funkciu každého stacionárneho časového radu.

**Veta (+ definícia).** *Nech  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  je stacionárny časový rad s autokovariančnou funkciou  $\gamma(h)$ . Potom existuje taká neklesajúca, zľava spojitá funkcia  $F$ , že*

$$\gamma(h) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i \lambda h} dF(\lambda), \quad (6.8)$$

pričom platí  $F(\lambda) = 0$  pre  $\lambda \leq -\frac{1}{2}$  a  $F(\lambda) = \gamma(0)$  pre  $\lambda \geq \frac{1}{2}$ . Rovnosti (6.8) sa hovorí **spektrálny rozklad autokovariančnej funkcie** a funkciu  $F$  nazývame **spektrálna distribučná funkcia** časového radu  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ .

Význam spektrálnej distribučnej funkcie v bode  $\lambda$  ostáva taký istý, t.j. hovorí aká je celková „sila“ frekvencií menších ako  $\lambda$  (a  $F(\lambda^{(2)}) - F(\lambda^{(1)})$  nám teda hovorí, ako „silné“ sú frekvencie medzi nejakými  $\lambda^{(1)} < \lambda^{(2)}$ ).

**Dôkaz.** V zimnom semestri sme ukázali, že funkcia  $\gamma$  je pozitívne semidefinitná, takže pre ľubovoľné prirodzené číslo  $n$  a  $n$ -ticu komplexných čísel  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$  platí

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_j \bar{c}_k \gamma(j-k) \geq 0$$

(takto funguje pozitívna semidefinitnosť s komplexnými číslami). Špeciálne položíme  $c_j \equiv e^{-2\pi i j \lambda}$  pre  $j = 1, \dots, n$  a pre každé prirodzené číslo  $n$  definujeme funkciu

$$\varphi_n(\lambda) \equiv \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n e^{-2\pi i j \lambda} \overline{e^{-2\pi i k \lambda}} \gamma(j-k) \quad (6.9)$$

<sup>7</sup>Ponúkam 2 body z 0 za pekné odvodenie bez „epsilonov“. Hint: integrálna veta o strednej hodnote môže pomôcť.

pre  $\lambda \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , inde položíme  $\varphi_n(\lambda) \equiv 0$ . Hoci sa môže zdať, že  $\varphi_n$  môže nadobúdať aj komplexné hodnoty, v skutočnosti sa pre ľubovoľné  $\lambda$  komplexná jednotka  $i$  vždy „vymaže“, takže ide o „normálnu“ reálnu funkciu. Keďže

$$e^{-2\pi ik\lambda} = \cos(-2\pi k\lambda) + i \sin(-2\pi k\lambda) = \cos(2\pi k\lambda) - i \sin(2\pi k\lambda)$$

(lebo párnosť kosínusu a nepárnosť sínusu), tak

$$\overline{e^{-2\pi ik\lambda}} = \cos(2\pi k\lambda) + i \sin(2\pi k\lambda) = e^{2\pi ik\lambda},$$

čiže funkciu  $\varphi_n$  môžeme zapísať ako

$$\varphi_n(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n e^{-2\pi i(j-k)\lambda} \gamma(j-k).$$

Všimnime si, že vo výraze za sumami sa sumačné indexy vyskytujú iba v tvare  $j-k$  - môžeme teda spraviť substitúciu  $t \equiv j-k$ . Hranice pre  $t$  budú od  $-n+1$  (to je najmenšie, čo vieme z  $j-k$  dostať) po  $n-1$  (to je najväčšie, čo vieme dostať), pričom si ale musíme dávať pozor, že napríklad situáciu  $j-k=0$  máme v sume viackrát (konkrétne  $n$ -krát) ako situáciu  $j-k=2$  (tú máme iba  $n-2$ -krát). Nie je ťažké si uvedomiť, že pre ľubovoľné  $t = -n+1, \dots, n-1$  nastane v sumách situácia  $j-k=t$  práve  $(n-|t|)$ -krát - môžeme teda písať

$$\varphi_n(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{t=-n+1}^{n-1} (n-|t|) e^{-2\pi it\lambda} \gamma(t) = \sum_{t=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|t|}{n}\right) e^{-2\pi it\lambda} \gamma(t). \quad (6.10)$$

Funkcia  $\varphi_n$  je pre každé  $n$  nezáporná (lebo pozitívna semidefinitnosť  $\gamma$ ), zhora ohraničená (každý z konečného počtu sčítancov je v absolútnej hodnote nanajvyš  $\gamma(0)$ ) a spojitá (konečný súčet spojitých funkcií) - pre každé  $n$  môžeme teda definovať funkciu

$$F_n(\lambda) \equiv \int_{-\infty}^{\lambda} \varphi_n(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\lambda} \varphi_n(x) dx. \quad (6.11)$$

Funkcia  $F_n$  je spojitá (lebo integrál), neklesajúca (lebo integrál z nezápornej funkcie), pričom

$$F_n\left(-\frac{1}{2}\right) = \int_{-\frac{1}{2}}^{-\frac{1}{2}} \varphi_n(x) dx = 0$$

a

$$\begin{aligned} F_n\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \varphi_n(x) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{t=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|t|}{n}\right) e^{-2\pi itx} \gamma(t) dx = \\ &= \sum_{t=-n+1}^{n-1} \left(1 - \frac{|t|}{n}\right) \gamma(t) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi itx} dx = \gamma(0) \end{aligned}$$

(v poslednej rovnosti sme využili, že ak  $t=0$ , tak

$$\left(1 - \frac{|t|}{n}\right) \gamma(t) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi itx} dx = \left(1 - \frac{|0|}{n}\right) \gamma(0) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i0x} dx = \gamma(0) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} 1 dx = \gamma(0)$$

a ak  $t \neq 0$ , potom

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi itx} dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (\cos(-2\pi tx) + i \sin(-2\pi tx)) dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos(2\pi tx) dx - i \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sin(2\pi tx) dx = 0; \quad (6.12)$$

to, že obidva integrály výjdu 0 najľahšie vidno z obrázku, ale dá sa to samozrejme aj integrovaním). Pre  $\lambda \leq -\frac{1}{2}$  triviálne platí  $F_n(\lambda) = 0$  a pre  $\lambda \geq \frac{1}{2}$  zase  $F_n(\lambda) = \gamma(0)$ . Platí, že ak máme postupnosť takýchto funkcií (možno ste to mali na Teórii pravdepodobnosti pod názvom Helly-Bray-ova veta), tak existuje podpostupnosť  $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$  a zľava spojitá, neklesajúca funkcia  $F$ , že platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_{n_k}(\lambda) = F(\lambda) \quad (6.13)$$

vo všetkých bodoch spojitosti  $F$ , pričom  $F$  si zachová aj vlastnosti  $F(\lambda) = 0$  pre  $\lambda \leq -\frac{1}{2}$  a  $F(\lambda) = \gamma(0)$  pre  $\lambda \geq \frac{1}{2}$ . Zároveň platí (možno bolo na Teórii pravdepodobnosti pod názvom Helly-Montel-ova veta), že pre ľubovoľnú spojitú funkciu  $g$  platí

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(\lambda) dF_{n_k}(\lambda) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(\lambda) dF(\lambda)$$

Ak si uvedomíme, že  $\varphi_{n_k}$  je vlastne hustota funkcie  $F_{n_k}$ , tak pre ľubovoľné  $h \in \mathbb{Z}$  a funkciu  $g(\lambda) \equiv e^{2\pi i h \lambda}$  dostávame

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i h \lambda} dF(\lambda) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i h \lambda} dF_{n_k}(\lambda) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i h \lambda} \varphi_{n_k}(\lambda) d\lambda = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i h \lambda} \sum_{t=-n_k+1}^{n_k-1} \left(1 - \frac{|t|}{n_k}\right) e^{-2\pi i t \lambda} \gamma(t) d\lambda = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{t=-n_k+1}^{n_k-1} \left(1 - \frac{|t|}{n_k}\right) \gamma(t) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i h \lambda} e^{-2\pi i t \lambda} d\lambda = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{t=-n_k+1}^{n_k-1} \left(1 - \frac{|t|}{n_k}\right) \gamma(t) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i (h-t) \lambda} d\lambda = (\star). \end{aligned}$$

Analogicky ako vyššie platí, že

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i (h-t) \lambda} d\lambda = \begin{cases} 1 & \text{ak } h - t = 0 \Leftrightarrow h = t, \\ 0 & \text{ak } h \neq t, \end{cases}$$

takže sčítance v sume od  $t = -n_k + 1$  po  $t = n_k - 1$  sú v podstate skoro všade nuly okrem prípadu, kedy  $t = h$ , kedy dostávame

$$(\star) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{|h|}{n_k}\right) \gamma(h) = \gamma(h),$$

čím je dôkaz hotový. □

Ďalej ukážeme, že podobne ako pri kovariančnej funkcii časového radu (6.3), ktorú vieme vyjadriť pomocou integrálu ako

$$\gamma(h) = \sum_{\substack{j=-l \\ j \neq 0}}^l \frac{\sigma_j^2}{2} e^{2\pi i \lambda_j h} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i \lambda h} dF(\lambda), \quad (6.14)$$

aj samotný časový rad (6.3) vieme vyjadriť pomocou takzvaného náhodného integrálu ako

$$X_t = \sum_{\substack{j=-l \\ j \neq 0}}^l Z_j e^{2\pi i \lambda_j t} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i \lambda t} dZ(\lambda), \quad (6.15)$$

kde  $Z$  je takzvaná náhodná miera. Keďže náhodná miera a náhodný integrál nie sú úplne triviálne pojmy, na chvíľu odbočíme a povieme si o nich v samostatnej podkapitole.

## Náhodná miera a náhodný integrál

Nech  $(\Omega, \mathcal{S}, P)$  je pravdepodobnostný priestor a označme

$$L^2(P) = \{ \text{merateľné } X : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : E(X) = 0 \text{ a } D(X) = E(X\bar{X}) < \infty \}, \quad (6.16)$$

čiže priestor komplexných náhodných premenných s nulovou strednou a konečnou disperziou. Nulová stredná hodnota nie je nutná a nasledujúce definície a odvodenia by sa dali spraviť aj s nenulovou strednou hodnotou. Nulová stredná hodnota ale veľa vecí zjednoduší a prechod k nenulovej je viac-menej iba technická záležitosť, takže preto pridávame tento predpoklad. Skalárny súčin na takomto priestore sa definuje ako

$$\langle X, Y \rangle_{L^2(P)} \equiv \int_{\Omega} X\bar{Y} dP = E(X\bar{Y}) = \text{Cov}(X, Y). \quad (6.17)$$

Ďalej uvažujme ohraničenú, zľava spojitú, neklesajúcu funkciu  $F$  (ďalej takejto funkciu budeme hovoriť *distribučná funkcia*, keďže má veľmi podobné vlastnosti ako distribučná funkcia náhodnej premennej) a priestor

$$L^2(F) = \left\{ \text{merateľné } g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\overline{g(\lambda)} dF(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2 dF(\lambda) < \infty \right\} \quad (6.18)$$

so skalárnym súčinom

$$\langle g, h \rangle_{L^2(F)} = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\overline{h(\lambda)} dF(\lambda). \quad (6.19)$$

Pozorný čitateľ si iste všimol, že  $L^2(P)$  a  $L^2(F)$  majú podobnú štruktúru, ba dokonca takú istú, len namiesto miery  $P$  máme mieru danú funkciou  $F$ .

**Definícia.** Nech  $F$  je distribučná funkcia. Zobrazenie  $Z : \mathcal{B} \rightarrow L^2(P)$  ( $\mathcal{B}$  je borelovská  $\sigma$ -algebra na  $\mathbb{R}$ ) s vlastnosťami

1.  $E(Z(A)) = 0$  pre každé  $A \in \mathcal{B}$ ,
2.  $Z(A \cup B) = Z(A) + Z(B)$  pre ľubovoľné disjunktné  $A, B \in \mathcal{B}$ ,
3.  $\langle Z(A), Z(B) \rangle_{L^2(P)} = E\left(Z(A)\overline{Z(B)}\right) = \int_{A \cap B} dF(\lambda)$  pre ľubovoľné  $A, B \in \mathcal{B}$

sa nazýva ortogonálna náhodná miera združená s distribučnou funkciou  $F$ . Slovíčko „ortogonálna“ sa občas vynecháva. Pre istotu - keď je za integrálom rovno  $dF(\lambda)$ , tak je to to isté ako keby tam bolo  $1dF(\lambda) - \int_{A \cap B} dF(\lambda)$  nám teda hovorí, o koľko funkcia  $F$  narastie na množine  $A \cap B$ .

Priamo z definície možno vidieť, že

1.  $D(Z(A)) = E\left(Z(A)\overline{Z(A)}\right) = \int_{A \cap A} dF(\lambda) = \int_A dF(\lambda)$ ,
2. ak sú množiny  $A, B$  disjunktné, tak  $E\left(Z(A)\overline{Z(B)}\right) = \int_{\emptyset} dF(\lambda) = 0$ , čiže  $Z(A), Z(B)$  sú nekorelované (z pohľadu skalárneho súčinu sú kolmé).

Náhodný integrál sa definuje podobne ako Lebesgueov integrál - najprv sa definuje pre jednoduché merateľné funkcie a následne sa rozšíri na väčšiu triedu funkcií - v našom prípade na funkcie z  $L^2(F)$ . Pripomeňme, že jednoduchá merateľná funkcia  $g_n$  je taká funkcia, ktorú vieme zapísať ako

$$g_n(\lambda) = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{B_j}(\lambda), \quad (6.20)$$

kde  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ ,  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$  a sú disjunktné a

$$\chi_{B_j}(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{ak } \lambda \in B_j \\ 0 & \text{ak } \lambda \notin B_j. \end{cases}$$

Ľahko sa overí, že  $g_n \in L^2(F)$ . Pre jednoduchú merateľnú funkciu definujeme náhodný integrál ako

$$\int g_n(\lambda) dZ(\lambda) \equiv \sum_{j=1}^n c_j Z(B_j), \quad (6.21)$$

skrátene ho označujeme ako  $I(g_n)$  a je dobré si uvedomiť, že to je náhodná premenná. V hraniciach integrálu si môžeme predstaviť  $-\infty$  a  $\infty$  (čiže integrál cez celý priestor), v praxi sa to zvykne vynechávať. Dá sa ukázať, že pre ľubovoľnú funkciu  $g \in L^2(F)$  existuje postupnosť  $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$  jednoduchých merateľných funkcií, ktorá konverguje ku  $g$  v  $L^2(F)$ , čiže

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g_n(\lambda) - g(\lambda)|^2 dF(\lambda) = 0. \quad (6.22)$$

Náhodný integrál z funkcie  $g$  potom definujeme ako limitu postupnosti integrálov  $I(g_n)$  (dá sa ukázať, že táto limita v  $L^2(P)$  existuje), čiže

$$I(g) = \int g(\lambda) dZ(\lambda) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n(\lambda) dZ(\lambda). \quad (6.23)$$

To, že limita existuje v  $L^2(P)$  znamená, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |I(g) - I(g_n)|^2 dP = \lim_{n \rightarrow \infty} D(I(g) - I(g_n)) = 0,$$

kde  $I(g) \in L^2(P)$ . Stále platí, že  $I(g)$  je náhodná premenná (s nulovou strednou hodnotou a konečnou disperziou, čiže prvok  $L^2(P)$ ) - náhodný integrál je teda zobrazenie z  $L^2(F)$  do  $L^2(P)$ . Navyše platí, že toto zobrazenie zachováva skalárny súčin, čiže pre ľubovoľné  $g, h \in L^2(F)$  platí

$$\langle g, h \rangle_{L^2(F)} = \langle I(g), I(h) \rangle_{L^2(P)}. \quad (6.24)$$

Pre dve jednoduché merateľné funkcie  $g_n = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{B_j}$  a  $h_m = \sum_{k=1}^m d_k \chi_{C_k}$  to ide priamočiaro.

$$\begin{aligned} \langle I(g_n), I(h_m) \rangle_{L^2(P)} &= E \left( I(g_n) \overline{I(h_m)} \right) = E \left( \sum_{j=1}^n c_j Z(B_j) \overline{\sum_{k=1}^m d_k Z(C_k)} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m c_j \overline{d_k} E \left( Z(B_j) \overline{Z(C_k)} \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m c_j \overline{d_k} \int_{B_j \cap C_k} dF(\lambda) = \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m c_j \overline{d_k} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{B_j \cap C_k}(\lambda) dF(\lambda) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m c_j \overline{d_k} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{B_j}(\lambda) \chi_{C_k}(\lambda) dF(\lambda) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^n c_j \chi_{B_j}(\lambda) \sum_{k=1}^m \overline{d_k} \chi_{C_k}(\lambda) dF(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} g_n(\lambda) \overline{h_m(\lambda)} dF(\lambda) = \\ &= \langle g_n, h_m \rangle_{L^2(F)}. \end{aligned}$$

Pre ľubovoľné  $g, h \in L^2(F)$  by už bolo potrebné „čarovat“ s limitami, ale pointa by bola taká istá. Akýsi určitý integrál - nie cez celý priestor  $(-\infty, \infty)$ , ale iba cez nejakú množinu  $B \subseteq (-\infty, \infty)$  - môžeme jednoducho definovať ako

$$\int_B g(\lambda) dZ(\lambda) = \int g(\lambda) \chi_B(\lambda) dZ(\lambda). \quad (6.25)$$

## Spektrálny rozklad stacionárneho časového radu

Vráťme sa teraz naspäť k časovému radu (6.3), respektíve jeho zápisu

$$X_t = \sum_{\substack{j=-l \\ j \neq 0}}^l Z_j e^{2\pi i \lambda_j t}. \quad (6.26)$$

Ak za náhodnú mieru  $Z : \mathcal{B} \rightarrow L^2(P)$  položíme

$$Z(A) \equiv \sum_{\substack{j=-l \\ j \neq 0}}^l Z_j \chi_A(\lambda_j) \quad (6.27)$$

pre ľubovoľné  $A \in \mathcal{B}$ , tak naozaj platí

$$X_t = \sum_{\substack{j=-l \\ j \neq 0}}^l Z_j e^{2\pi i \lambda_j t} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i \lambda t} dZ(\lambda). \quad (6.28)$$

Formálne ukázať (podľa definície náhodného integrálu), že táto rovnosť platí, je trochu komplikovanejšie (zvládnuteľné, ale dlhšie, technickejšie a nie až tak podstatné). Neformálnejšie by sa to dalo tak, že si „požičiame“ ideu z Riemann-Stieltjesovho integrálu, ale tentokrát šírku „základne“  $[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}]$  „odmeriame“ ako  $Z\left(\left[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)}\right]\right)$  - z toho už viac-menej priamo výjde rovnosť (6.28). Ešte by sa patrilo ukázať, že  $Z$  je naozaj náhodná miera (združená s nejakou distribučnou funkciou), čiže platia body 1., 2. a 3. z definície - opäť je to technická záležitosť, nechávam to na dobrovoľnú domácu úlohu za 2 body z 0. Môžete využiť, že  $Z$  je združená s distribučnou funkciou  $F$  definovanou v (6.7), a že pre  $c \in \mathbb{R}$  a nejakú funkciu  $g$  môžeme integrál  $\int_c^c g(\lambda) dF(\lambda)$  spočítať ako  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{c-\varepsilon}^{c+\varepsilon} g(\lambda) dF(\lambda)$ .

Zápisu časového radu pomocou integrálu v (6.28) sa hovorí **spektrálny rozklad časového radu**. Podobne ako pri spektrálnej distribučnej funkcii, aj tu platí, že takto vieme zapísať ľubovoľný stacionárny časový rad s nulovou strednou hodnotou - to je dôsledok nasledujúcej vety.

**Veta** (Karhunenova). *Nech  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  je časový rad s nulovou strednou hodnotou a autokovariančnou funkciou  $\gamma(s, t)$ . Nech  $F$  je distribučná funkcia a nech  $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  je funkcia s vlastnosťou*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t, \lambda)|^2 dF(\lambda) < \infty \quad (6.29)$$

pre ľubovoľné  $t \in \mathbb{Z}$ . Ak pre nejakú náhodnú mieru  $Z$  združenú s distribučnou funkciou  $F$  platí

$$X_t = \int f(t, \lambda) dZ(\lambda), \quad (6.30)$$

tak autokovariančnú funkciu vieme zapísať ako

$$\gamma(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s, \lambda) \overline{f(t, \lambda)} dF(\lambda). \quad (6.31)$$

Naopak, ak pre funkciu  $\gamma$  platí rovnosť (6.31) pre nejakú distribučnú funkciu  $F$ , tak existuje náhodná miera  $Z$  združená s  $F$ , že pre  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  platí rovnosť (6.30).

Stručne môžeme túto vetu zapísať ako

$$X_t = \int f(t, \lambda) dZ(\lambda) \Leftrightarrow \gamma(s, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s, \lambda) \overline{f(t, \lambda)} dF(\lambda), \quad (6.32)$$

kde  $Z$  je združená s  $F$  (stačí, ak si zapamätáte túto stručnú verziu). Implikácia „ $\Rightarrow$ “ je ľahká, avšak „ $\Leftarrow$ “ je komplikovaná, takže dôkaz tu neuvedieme.



**Dôsledok.** Pre ľubovoľný stacionárny časový rad  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  s nulovou strednou hodnotou existuje taká náhodná miera  $Z$ , že vieme písať

$$X_t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i \lambda t} dZ(\lambda). \quad (6.33)$$

Tento zápis nazývame **spektrálny rozklad stacionárneho časového radu**.

**Dôkaz.** Vyššie sme ukázali, že autokovariančnú funkciu stacionárneho náhodného procesu vieme písať ako

$$\gamma(h) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i \lambda h} dF(\lambda),$$

kde  $F$  je spektrálna distribučná funkcia. Pripomeňme, že  $\gamma(h) = \gamma(-h)$  a je to iba skrátenejší zápis  $\gamma(t, t+h)$  (pretože toto nezávisí od  $t$ ). Pre  $s, t \in \mathbb{Z}$  teda môžeme písať

$$\begin{aligned} \gamma(s, t) &= \gamma(s-t) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i \lambda (s-t)} dF(\lambda) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i \lambda s} e^{-2\pi i \lambda t} dF(\lambda) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i \lambda s} \overline{e^{2\pi i \lambda t}} dF(\lambda) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s, \lambda) \overline{f(t, \lambda)} dF(\lambda), \end{aligned}$$

kde

$$f(t, \lambda) \equiv \begin{cases} e^{2\pi i \lambda t} & \text{ak } \lambda \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

Dostali sme pravú stranu ekvivalencie (6.32), takže podľa Karhunenovej vety naozaj existuje taká náhodná miera  $Z$  združená so spektrálnou distribučnou funkciou  $F$ , že platí

$$X_t = \int f(t, \lambda) dZ(\lambda) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i \lambda t} dZ(\lambda) \quad (6.34)$$

(hranice integrálu sú iba  $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ , lebo mimo tohto intervalu platí  $f(t, \lambda) = 0$ ). □

Zopár poznámok k spektrálnemu rozkladu stacionárneho časového radu:

1. To, že v Karhunenovej vete je predpoklad, že stredná hodnota časového radu je nulová, je opäť iba „kozmetická“ záležitosť - ak by sme mali stacionárny časový rad  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  so strednou hodnotou  $\mu$ , tak  $Y_t = X_t - \mu$  už má nulovú strednú hodnotu, takže ho vieme zapísať ako

$$Y_t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i \lambda t} dZ(\lambda),$$

čiže  $X_t$  vieme zapísať ako

$$X_t = \mu + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i \lambda t} dZ(\lambda).$$

2. Pripomeňme, že za  $e^{2\pi i \lambda t}$  sa „skrývajú“ sínusy a kosínusy. Ak sa zároveň na integrál pozeráme ako na akési zovšeobecnenie sumy, tak naozaj ide o analógiu časového radu (6.3).

## Spektrálna hustota

Spektrálny rozklad stacionárneho časového radu má sice teoretický význam, prakticky je ale pre nás zaujímavejšia skôr spektrálna distribučná funkcia, respektíve ešte väčší praktický význam má takzvaná spektrálna hustota (ak existuje), čo je obyčajná derivácia distribučnej funkcie (analogicky ako pri spojitých náhodných premenných). Pripomeňme, že spektrálna distribučná funkcia v bode  $\lambda$  nám hovorí aká je celková „sila“ frekvencií menších ako  $\lambda$ . Čím viac teda v nejakom bode  $\tilde{\lambda}$  funkcia  $F$  rastie, tým je frekvencia  $\tilde{\lambda}$  „silnejšia“. To, ako veľmi funkcia v danom bode rastie, nám hovorí práve derivácia - význam spektrálnej hustoty (označujeme ju  $f$ ) v bode  $\lambda$  bude teda priamo „sila“ frekvencie  $\lambda$ . Na rozdiel od spektrálnej distribučnej funkcie, spektrálna hustota nemusí vždy existovať (napríklad pri diskretnom spektre neexistovala - opäť analógia s náhodnými premennými). O postačujúcej podmienke pre jej existenciu, rovnako aj o tom, ako ju vyjadriť pomocou autokovariančnej funkcie hovorí nasledujúca veta.

**Veta.** Ak pre autokovariančnú funkciu  $\gamma$  časového radu  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  platí

$$\sum_{t=-\infty}^{\infty} |\gamma(t)| < \infty, \quad (6.35)$$

tak spektrálna hustota  $f(\lambda) = F'(\lambda)$  existuje a platí

$$f(\lambda) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \gamma(t) e^{-2\pi i \lambda t} \quad (6.36)$$

pre  $\lambda \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ , inde je nulová.

Keďže autokovariančná funkcia stacionárneho časového radu je symetrická okolo nuly, tak podmienka (6.35) je to isté, čo podmienka  $\sum_{t=0}^{\infty} |\gamma(t)| < \infty$ . Dôkaz vynecháme, veľmi stručná idea je taká, že funkcia  $\varphi_n$  definovaná v (6.10) - čo bola hustota funkcie  $F_n$  definovanej v (6.11) - za platnosti podmienky (6.35) skonverguje práve k (6.36). Pre spektrálnu hustotu zjavne platí nasledovné:

1. Autokovariančnú funkciu vieme vyjadriť aj pomocou nej ako  $\gamma(h) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i \lambda h} f(\lambda) d\lambda$ .
2. Vieme písať aj

$$f(\lambda) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \gamma(t) e^{-2\pi i \lambda t} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \gamma(t) (\cos(2\pi \lambda t) - i \sin(2\pi \lambda t)).$$

Keďže ale  $\gamma(t)$  je párna a  $\sin(2\pi \lambda t)$  je nepárna, tak  $-\gamma(t) i \sin(2\pi \lambda t) - \gamma(-t) i \sin(2\pi \lambda (-t)) = 0$ . Zároveň  $\sin(2\pi \lambda 0) = 0$ , takže nám ostanú iba kosínusy a môžeme písať

$$f(\lambda) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \gamma(t) \cos(2\pi \lambda t).$$

3. Keďže  $\gamma$  aj kosínus sú párne, tak aj spektrálna hustota  $f$  je párna, čiže  $f(\lambda) = f(-\lambda)$  - z toho dôvodu sa spektrálna hustota zvykne uvádzať iba pre  $\lambda \in [0, \frac{1}{2}]$ .

V prípade, že  $X_t$  je obyčajný biely šum s disperziou  $\sigma^2$ , tak  $\gamma(0) = \sigma^2$  a inde je  $\gamma$  nulová - spektrálna hustota je teda v takom prípade zjavne  $f(\lambda) = \sigma^2$  pre  $\lambda \in [0, \frac{1}{2}]$ . Vidíme, že je to konštantná funkcia, čiže všetky frekvencie sú rovnomerne zastúpené (rovnako „silné“) - z toho dôvodu je biely šum biely - ide o analógiu bieleho svetla, ktoré tiež zahŕňa kombináciu celého (farebného) spektra.

## Lineárny filter

K spektrálnej hustote sa ešte vrátíme, ale predtým si povieme o takzvanom lineárnom filtri, čo je užitočný nástroj pri práci so spektrálnymi hustotami.

**Definícia.** Lineárny filter je transformácia časového radu  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  na časový rad  $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  pomocou predpisu

$$Y_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j X_{t-j}, \quad (6.37)$$

kde  $\{a_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  sú reálne koeficienty, pričom

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| < \infty.$$

**Veta.** Ak má časový rad  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  spektrálnu hustotu  $f_X(\lambda)$ ,  $\lambda \in [0, \frac{1}{2}]$ , tak časový rad  $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  získaný predpisom (6.37) má spektrálnu hustotu tvaru

$$f_Y(\lambda) = |A(\lambda)|^2 f_X(\lambda), \quad (6.38)$$

kde

$$A(\lambda) \equiv \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{-2\pi i \lambda j}$$

je takzvaná **prenosová funkcia**.

**Dôkaz.** Ukážeme, že pre autokovariančnú funkciu  $\gamma_Y$  časového radu  $\{Y_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  platí

$$\gamma_Y(h) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i \lambda h} |A(\lambda)|^2 f_X(\lambda) d\lambda.$$

Dá sa ukázať, že to už stačí na to, aby  $|A(\lambda)|^2 f_X(\lambda)$  bola spektrálna hustota.

Označme  $\gamma_X$  autokovariančnú funkciu časového radu  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ . Platí

$$\begin{aligned} \gamma_Y(h) &= \text{Cov}(Y_t, Y_{t+h}) = \text{Cov}\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j X_{t-j}, \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k X_{t+h-k}\right) = \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_j a_k \text{Cov}(X_{t-j}, X_{t+h-k}) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_j a_k \gamma_X(h-k+j) = \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_j a_k \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i \lambda (h-k+j)} f_X(\lambda) d\lambda = \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j e^{2\pi i \lambda j}\right) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-2\pi i \lambda k}\right)}_{\overline{A(\lambda)} A(\lambda) = |A(\lambda)|^2} e^{2\pi i \lambda h} f_X(\lambda) d\lambda = \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i \lambda h} \underbrace{|A(\lambda)|^2 f_X(\lambda)}_{f_Y(\lambda)} d\lambda. \end{aligned}$$

□

Keďže vieme, že spektrálna hustota bieleho šumu je  $f_W(\lambda) = \sigma^2$  pre  $\lambda \in [0, \frac{1}{2}]$ , pomocou tejto vety môžeme ľahko vypočítať napríklad spektrálnu hustotu MA(1) procesu s nulovou strednou hodnotou, t.j.

$$X_t = W_t + \theta W_{t-1}. \quad (6.39)$$

Časový rad  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  je zjavne lineárny filter filter bieleho šumu s  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = \theta$  a  $a_j = 0$  pre ostatné  $j$ . Prenosová funkcia  $A(\lambda)$  má teda tvar

$$A(\lambda) = 1 + \theta e^{-2\pi i \lambda},$$

takže platí

$$\begin{aligned} |A(\lambda)|^2 &= A(\lambda) \overline{A(\lambda)} = (1 + \theta e^{-2\pi i \lambda})(1 + \theta e^{2\pi i \lambda}) = 1 + \theta e^{-2\pi i \lambda} + \theta e^{2\pi i \lambda} + \theta^2 = \\ &= 1 + \theta(\cos(2\pi \lambda) - i \sin(2\pi \lambda)) + \theta(\cos(2\pi \lambda) + i \sin(2\pi \lambda)) + \theta^2 = 1 + 2\theta \cos(2\pi \lambda) + \theta^2. \end{aligned}$$

Spektrálna hustota MA(1) procesu má teda tvar

$$f_X(\lambda) = (1 + 2\theta \cos(2\pi \lambda) + \theta^2) \sigma^2.$$

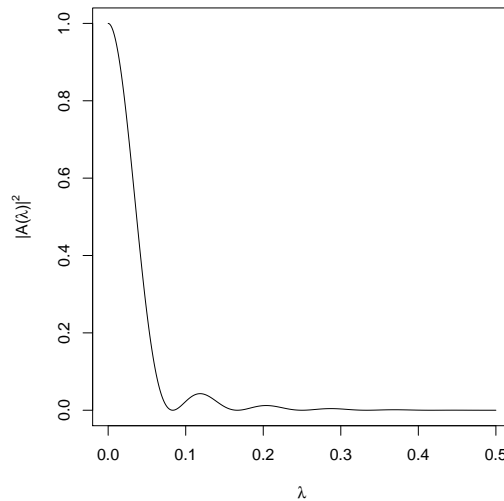
Analogicky by sme vedeli vypočítať spektrálnu hustotu ľubovoľného MA( $q$ ) procesu, kde  $q$  môže byť aj  $\infty$ . Zároveň pripomeňme zo zimného semestra, že každý stacionárny časový rad  $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$  sa dá zapísať ako MA( $\infty$ ) (Woldova dekompozícia), čiže každý stacionárny časový rad je v podstate iba lineárny filter bieleho šumu. Ak teda poznáme Woldovu dekompozíciu (jej parametre) časového radu, tak teoreticky vieme ľahko vypočítať aj jeho spektrálnu hustotu. Pre ARMA( $p, q$ ) proces napríklad platí

$$f_X(\lambda) = \sigma^2 \frac{|\Theta(e^{-2\pi i \lambda})|^2}{|\Phi(e^{-2\pi i \lambda})|^2},$$

kde  $\Phi$  je autoregresný polynóm a  $\Theta$  je moving average polynóm. Kto by si nepamätal, tak ARMA proces má tvar

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + W_t + \theta_1 W_{t-1} + \dots + \theta_q W_{t-q}$$

a  $\Phi$  a  $\Theta$  sú definované ako  $\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p$  a  $\Theta(z) = 1 + \theta_1 z + \theta_2 z^2 + \dots + \theta_q z^q$ .



Obr. 22:  $|A(\lambda)|^2$  v centrovanom kĺzavom priemere (12 mesačnom).

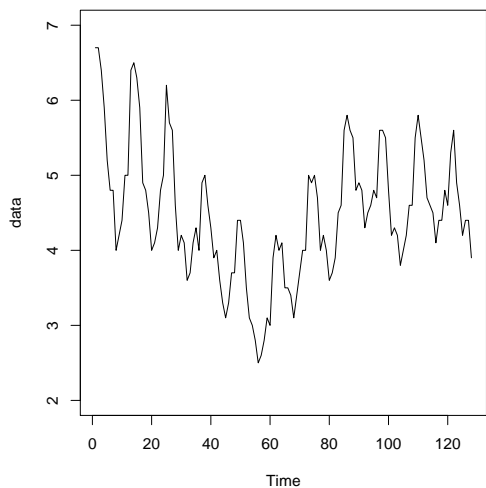
Okrem toho, že pomocou lineárneho filtra vieme ľahko počítať spektrálne hustoty, je to aj užitočný nástroj, ak sa chceme „zbaviť“ niektorých frekvencií („odfiltrovať“ niektoré frekvencie). Uvažujme napríklad 12 mesačný centrováný kĺzavý priemer, t.j.

$$Y_t = \frac{1}{24} X_{t-6} + \frac{1}{12} X_{t-5} + \frac{1}{12} X_{t-4} + \dots + \frac{1}{12} X_{t+4} + \frac{1}{12} X_{t+5} + \frac{1}{24} X_{t+6}.$$

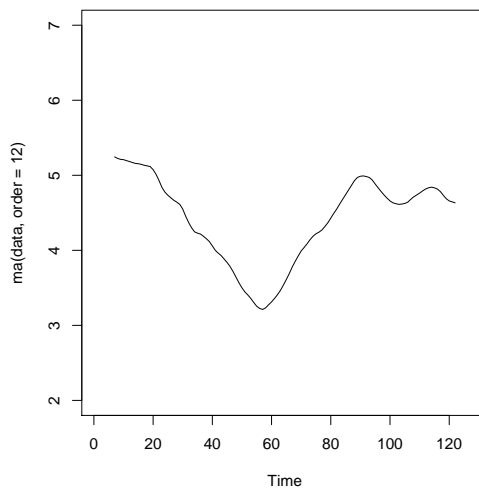
Dá sa ukázať, že prenosová funkcia má v tomto prípade tvar

$$A(\lambda) = \frac{1}{12} \left( 1 + \cos(12\pi \lambda) + 2 \sum_{k=1}^5 \cos(2\pi \lambda k) \right),$$

príčom  $|A(\lambda)|^2$  je zobrazená na Obr. 22. Z grafu vidíme, že  $|A(\lambda)|^2$  je vysoká pre nízke frekvencie a  $|A(\lambda)|^2 \approx 0$  pre vysoké frekvencie. Prakticky nám teda takáto transformácia „vyfiltruje“ (odstráni) vysoké frekvencie (cykly malých dĺžok) a ostanú nám len nízke frekvencie (cykly veľkých dĺžok) - napríklad ak na dáta z Obr. 23 aplikujeme tento kĺzavý priemer, tak dostaneme dáta na Obr. 24, čiže sa zbavíme vysokých frekvencií (ročných cyklov).



Obr. 23



Obr. 24

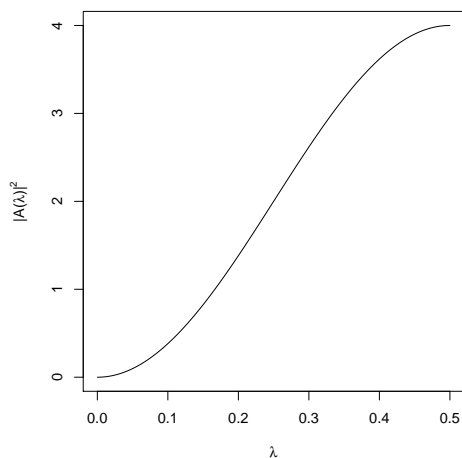
Naopak ak zoberieme prvú diferenciu

$$Y_t = X_t - X_{t-1},$$

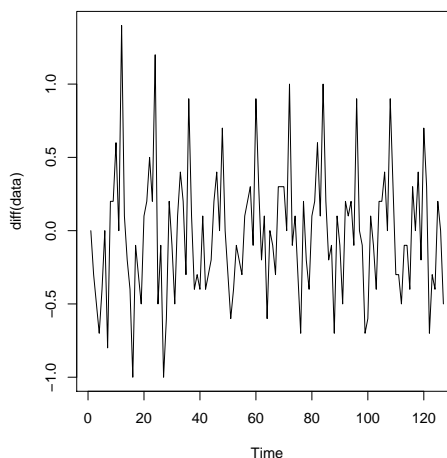
t.j. lineárny filter, kde  $a_0 = 1, a_1 = -1$  a zvyšné sú nulové, tak prenosová funkcia má tvar  $A(\lambda) = 1 - e^{-2\pi i \lambda}$ , čiže

$$|A(\lambda)|^2 = 2(1 - \cos(2\pi\lambda)),$$

vid' Obr. 25. Takáto transformácia nám dá teda do popredia skôr vysoké frekvencie a potlačí nízke - ak ju aplikujeme na dáta z Obr. 23, dostaneme dáta na Obr. 26 (vidíme, že to zvýraznilo krátke cykly).



Obr. 25:  $|A(\lambda)|^2$  v prípade prvej diferencie.



Obr. 26

## Neparametrické odhadovanie spektrálnej hustoty

V poslednej časti si stručne povieme o možných spôsoboch odhadovania spektrálnej hustoty.

Keďže pre spektrálnu hustotu platí

$$f(\lambda) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \gamma(t)e^{-2\pi i\lambda t}, \quad (6.40)$$

prirodzeným odhadom by bolo nahradiť hodnoty autokovariančnej funkcie  $\gamma(t)$  jej odhadmi, t.j.

$$\sum_{t=-(n-1)}^{n-1} \hat{\gamma}(t)e^{-2\pi i\lambda t}. \quad (6.41)$$

Takýto odhad sa nazýva periódogram a označuje sa ako  $I_n(\lambda)$ . Kto by si náhodou nepamätal, tak autokovariančnú funkciu pre  $|t| \leq n-1$  odhadujeme ako

$$\hat{\gamma}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-|t|} (X_j - \bar{X})(X_{j+|t|} - \bar{X}). \quad (6.42)$$

V literatúre sa periódogram väčšinou definuje ako

$$I_n(\lambda) = \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n (X_t - \bar{X})e^{-2\pi i\lambda t} \right|^2, \quad (6.43)$$

respektíve sa predpokladá, že stredná hodnota je nulová a kladie sa

$$I_n(\lambda) = \frac{1}{n} \left| \sum_{t=1}^n X_t e^{-2\pi i\lambda t} \right|^2 \quad (6.44)$$

(prípadne sa to občas zapisuje pomocou sínusov a kosínusov). Po umocnení a niekoľkých jednoduchých úpravách by sme dostali práve výraz (6.41). Jeden z dôvodov takéhoto zápisu je, že pre  $\lambda = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$  je výraz

$$\sum_{t=1}^n X_t e^{-2\pi i\lambda t}$$

takzvaná diskretná Fourierova transformácia postupnosti  $X_1, X_2, \dots, X_n$  (až na nejaké násobenie konštantou), ktorá sa dá efektívne (=rýchlo) vypočítať pomocou algoritmu FFT (Fast Fourier Transform). Frekvenciám  $\lambda = 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}$  sa hovorí fundamentálne frekvencie, prípadne Fourierove frekvencie. Keďže diskretnú Fourierovu transformáciu máme iba pre niektoré  $\lambda$ , aj periódogram sa spravidla definuje iba pre  $\lambda = \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{n}$ . (Teoreticky ho samozrejme vieme vypočítať pre ľubovoľné  $\lambda$ , prakticky sa aj tak musíme obmedziť iba na konečnú množinu bodov.) V niektorých zdrojoch sa pridáva aj  $\lambda = 0$ , ale v niektorých úpravách, to robí trochu „zlobu“ a ani R-ko to pre  $\lambda = 0$  nepočíta.

Tento odhad síce na prvý pohľad vyzerá zmysluplne, avšak dá sa ukázať, že odhad  $I_n(\lambda)$  je vychýlený ( $E(I_n(\lambda)) \neq f(\lambda)$ ) a nekonzistentný (t.j. neplatí  $D(I_n(\lambda)) \rightarrow 0$  pre  $n \rightarrow \infty$ ), čo od odhadu práve nechceme. Hlavné dôvody sú, voľnejšie povedané, nasledovné.

1. Odhad autokovariančnej funkcie  $\gamma(t)$  je najmä pre koncové body ( $t \approx n-1$ ) veľmi nepresný - napríklad pri  $\hat{\gamma}(n-1)$  sa nám suma v (6.42) zredukuje iba na

$$\frac{1}{n}(X_1 - \bar{X})(X_n - \bar{X}),$$

čiže ak sú náhodou merania  $x_1$  a  $x_n$  výrazne „uletené“, tak nám to môže pokaziť celý odhad.

2. So zvyšujúcim  $n$  zväčšujeme aj počet bodov  $\lambda$ , v ktorých spektrálnu hustotu odhadujeme - čiže namiesto zlepšovania odhadov akoby iba pridávame body, v ktorej  $f(\lambda)$  odhadujeme.

Na (aspoň čiastočné) odstránenie týchto problémov sa využívajú dve techniky - takzvaný tapering (je to anglický výraz, prekladať ho nebudeme) a vyhladzovanie periódogramu.

Tapering slúži najmä na zníženie vychýlenosti odhadu. Princíp je taký, že hodnoty  $(X_t - \bar{X})$  vo vzťahu (6.43) vyvážíme množinou váh  $h = \{h_1, \dots, h_n\}$ , čím dostaneme takzvaný „tapered periodogram“

$$I_n^h(\lambda) = \frac{1}{\sum_{t=1}^n h_t^2} \left| \sum_{t=1}^n h_t (X_t - \bar{X}) e^{-2\pi i \lambda t} \right|^2 \quad (6.45)$$

(ak by sme zvolili  $h = \{1, 1, \dots, 1\}$ , tak dostaneme klasický periódogram). V praxi sa váhy volia tak, že pre „stredové“ body ( $t \approx \frac{n}{2}$ ) je  $h_t = 1$  a smerom k „okrajom“ ( $t \approx 1$  a  $t \approx n$ ) tieto váhy klesajú. Jeden z dôsledkov takéhoto vyváženia je, že nám „neuletia“ spomínané problematické odhady  $\hat{\gamma}(t)$  pre  $t \approx n - 1$ . Na konkrétnu voľbu váh existuje veľa možností, R-ko napríklad používa takzvaný „split cosine bell“ definovaný ako

$$h_t = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{\pi(t-\frac{1}{2})}{m} \right) \right) & \text{pre } t = 1, \dots, m, \\ 1 & \text{pre } t = m + 1, \dots, n - m, \\ \frac{1}{2} \left( 1 - \cos \left( \frac{\pi(n-t+\frac{1}{2})}{m} \right) \right) & \text{pre } t = n - m + 1, \dots, n, \end{cases}$$

kde  $m$  sa dá nastaviť (automaticky sa berie 10% z počtu dát (zaokrúhlených) - v praxi to netreba meniť).

Ďalšia technika na vylepšenie je vyhladzovanie periódogramu. Idea je taká, že ak máme dostatočne veľké  $n$  a  $f$  je spojité, tak pre nejaké prirodzené číslo  $L_n$  bude platiť

$$f\left(\frac{k}{n}\right) \approx f\left(\frac{k+j}{n}\right)$$

pre  $j = -L_n, -L_n + 1, \dots, L_n - 1, L_n$ . Odhad spektrálnej hustoty v nejakom bode  $\frac{k}{n}$  teda môžeme vylepšiť tak, že spriemerujeme odhady z okolitých bodov, t.j.

$$\hat{f}\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{j=-L_n}^{L_n} w_j I_n^h\left(\frac{k+j}{n}\right), \quad (6.46)$$

kde  $w_j$  sú váhy, pre ktoré platí  $w_j = w_{-j}$ ,  $w_j \geq 0$  a súčet váh je 1. Za istých podmienok pre  $L_n$  a váhy je už takýto odhad spektrálnej hustoty konzistentný a asymptoticky nevychýlený.

V praxi sa často používa takzvaný „Daniell smoother“, respektíve „modified Daniell smoother“, čo je obyčajný jednoduchý kľzavý priemer ( $w_j = \frac{1}{2L_n+1}$  pre každé  $j$ ), respektíve centrováný kľzavý priemer ( $w_{L_n} = \frac{1}{4L_n}$  a  $w_j = \frac{1}{2L_n}$  pre  $j \neq L_n$ ), pričom takýto „smoother“ (vyhladzovač? ☺) sa aplikuje dvakrát po sebe. Ak by sme mali napríklad „modified Daniell smoother“ pre  $L_n = 1$  (čiže váhy sú  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$  a  $\frac{1}{4}$ ) a aplikovali by sme ho dvakrát na nejakú postupnosť čísel  $\{u_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ , tak po prvej aplikácii dostaneme

$$\hat{u}_t = \frac{1}{4}u_{t-1} + \frac{1}{2}u_t + \frac{1}{4}u_{t+1}$$

a po druhej

$$\hat{\hat{u}}_t = \frac{1}{4}\hat{u}_{t-1} + \frac{1}{2}\hat{u}_t + \frac{1}{4}\hat{u}_{t+1} = \frac{1}{16}u_{t-2} + \frac{4}{16}u_{t-1} + \frac{6}{16}u_t + \frac{4}{16}u_{t+1} + \frac{1}{16}u_{t+2},$$

čiže technicky je v tomto prípade  $L_n = 2$  a váhy sú  $w_0 = \frac{6}{16}, w_1 = \frac{4}{16}$  a  $w_2 = \frac{1}{16}$ .

Čo sa týka voľby  $L_n$ , tak sa odporúča vyskúšať viac možností a vybrať subjektívne. Platí, že malé  $L_n$  spôsobí menšiu vychýlenosť odhadu, ale väčšiu varianciu, veľké  $L_n$  zase naopak, takže treba nájsť nejakú vhodnú rovnováhu. V princípe spravidla chceme dostatočne hladkú funkciu s dostatočne jasnými maximami (lebo nás zaujíma, ktoré konkrétne frekvencie sú dôležité).

## Parametrické odhadovanie spektrálnej hustoty

Dá sa ukázať, že pre spektrálnu hustotu  $g(\lambda)$  ľubovoľného stacionárneho časového radu s nulovou strednou hodnotou a pre ľubovoľné  $\varepsilon > 0$  existuje konečné  $p \in \mathbb{N}$  a stacionárny  $\text{AR}(p)$  proces

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + W_t,$$

kde pre spektrálnu hustotu  $f_X(\lambda)$  tohto procesu platí

$$|f_X(\lambda) - g(\lambda)| < \varepsilon,$$

pre ľubovoľné  $\lambda$ .

Idea parametrického odhadovania spektrálnej hustoty je teda veľmi jednoduchá - k dátam sa nájde vhodný  $\text{AR}(p)$  model a za odhad spektrálnej hustoty sa zoberie spektrálna hustota tohto  $\text{AR}(p)$  procesu. Spravidla sa vyskúša  $\text{AR}(1), \dots, \text{AR}(30)$  a zoberie sa spektrálna hustota  $\text{AR}(p)$  procesu s najlepším AIC (prípadne AICc alebo BIC - to sú tiež nejaké rozumné kritéria).

**Poznámka.** Pri všetkých týchto metódach netreba zabúdať na to, že pri spektrálnej analýze sa predpokladá stacionarita časového radu, takže ak je v dátach nejaký trend, tak ho treba odstrániť - napríklad odhadnutím  $Tr_t$  a odrátaním  $\widehat{Tr}_t$  od dát (R-ko to robí automaticky).