Veta 1. Autoregresný proces rádu p

$$X_t = c + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + W_t, \tag{1}$$

kde $\{W_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ je biely šum je kauzálny lineárny proces (a teda aj stacionárny) práve vtedy, keď sú všetky korene autoregresného polynómu

$$\Phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \ldots - \phi_p z^p \tag{2}$$

mimo jednotkového kruhu.

V takom prípade platí

$$X_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j W_{t-j}, \tag{3}$$

kde ψ_j pre $j \geq 1$ spĺňajú rekurziu (resp. lineárnu diferenčnú rovnicu)

$$\psi_j = \phi_1 \psi_{j-1} + \phi_2 \psi_{j-2} + \ldots + \phi_p \psi_{j-p} \tag{4}$$

s počiatočnými podmienkami $\psi_0 = 1, \psi_{-1} = \ldots = \psi_{-p+1} = 0$ a $\mu = \frac{1}{1-\phi_1-\ldots-\phi_p}$.

Pre prehľadnosť dôkaz spravíme pre $c = 0$, $p = 3$ a rozložíme ho do niekoľkých liem (zovšeobecnenie by nemalo robiť problém). Predtým ale stručne zopakujme, ako pracovať s rekurenciami.

Predpokladajme, že máme číselnú postupnosť $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ zadanú ako

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + a_p x_{n-p} \tag{5}$$

s počiatočnými podmienkami (hodnotami) $x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}$, pričom $a_1, \ldots, a_p$ sú známe. Z počiatočných podmienok a predpisu (5) ľahko vieme dopočítať ľubovoľné x_n, avšak niekedy pre x_n chceme (resp. potrebujeme) explicitný predpis. Na jeho nájdenie sa zostrojí takzvaný charakteristický polynóm

$$p(\lambda) = \lambda^p - a_1 \lambda^{p-1} - a_2 \lambda^{p-2} - \ldots - a_{p-1}\lambda - a_p \tag{6}$$

a nájdu sa jeho korene $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$.

Ak sú všetky korene rôzne, potom platí, že

$$x_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n + \ldots + c_p \lambda_p^n, \tag{7}$$

kde $c_1, \ldots, c_p$ sú čísla, ktoré vypočítame z počiatočných podmienok.

Príklad 1. Uvažujme známu Fibonacciho postupnosť danú ako $x_0 = 0, x_1 = 1$ a $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$ pre $n \geq 2$ (začiatok postupnosti je $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$). V tomto prípade $p = 2$ a $a_1 = a_2 = 1$, čiže charakteristický polynóm má tvar

$$\lambda^2 - \lambda - 1$$

a jeho korene sú $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ a $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (obyčajné riešenie kvadratickej rovnice). Predpis pre x_n teda bude

$$x_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

pričom c_1 a c_2 vypočítame z toho, že $x_0 = 0$ a $x_1 = 1$, takže

$$0 = x_0 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = c_1 + c_2,$$

teda $c_1 = -c_2$ a

$$1 = x_1 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = -c_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + c_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -c_2\sqrt{5},$$

z čoho dostávame $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ a $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Toto platí v prípade, že korene charakteristického polynómu sú rôzne. Ak by sme mali k rovnakých koreňov, napríklad $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k$, potom namiesto

$$x_n = c_1\lambda_1^n + \ldots + c_k\lambda_k^n + \text{zvyšné členy}$$

platí

$$x_n = c_1\lambda_1^n + c_2 n\lambda_2^n + c_3 n^2\lambda_3^n \ldots + c_k n^{k-1}\lambda_k^n + \text{zvyšné členy.}$$

Lema 1. Položme

$$\mathbf{\Phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Platí

1. $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastná hodnota matice $\mathbf{\Phi}$ práve vtedy, keď $\Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0$ (t.j. $\frac{1}{\lambda}$ je koreň autoregresného polynómu).

2. Ak $v = (v_1, v_2, v_3) \neq 0$ je riadkový vlastný vektor matice $\mathbf{\Phi}$, tak $v_1 \neq 0$.

Dôkaz.

1. Ak $\lambda \in \mathbb{C}$ je vlastná hodnota $\mathbf{\Phi}$, tak pre nejaký nenulový vektoru $(u_1, u_2, u_3)^\top$ platí

$$\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Ak rozpíšeme jednotlivé riadky, dostávame

$$\begin{aligned} \phi_1 u_1 + \phi_2 u_2 + \phi_3 u_3 &= \lambda u_1 \\ u_1 &= \lambda u_2 \\ u_2 &= \lambda u_3. \end{aligned}$$

Po dosadení tretej rovnice do druhej dostaneme $u_1 = \lambda^2 u_3$ a po dosadení druhej a tretej rovnice do prvej máme

$$\phi_1\lambda^2 u_3 + \phi_2\lambda u_3 + \phi_3 u_3 = \lambda^3 u_3. \tag{10}$$

Z druhej a tretej rovnice vyplýva, že u_3 nemôže byť nula, lebo inak by bol celý vektor $(u_1, u_2, u_3)^\top$ nulový (čo predpokladáme, že nie je), takže číslom u_3 môžeme rovnicu predeliť.

$$\phi_1\lambda^2 + \phi_2\lambda + \phi_3 = \lambda^3.$$

Keďže ϕ_3 je v AR(3) nenulové, matica $\mathbf{\Phi}$ je zjavne regulárna, teda nula nemôže byť vlastná hodnota, takže rovnicu ďalej môžeme predeliť číslom λ^3, čím dostávame

$$\phi_1\frac{1}{\lambda} + \phi_2\frac{1}{\lambda^2} + \phi_3\frac{1}{\lambda^3} = 1$$

a po odčítaní ľavej strany

$$0 = 1 - \phi_1\frac{1}{\lambda} - \phi_2\frac{1}{\lambda^2} - \phi_3\frac{1}{\lambda^3}. \tag{11}$$

Na pravej strane rovnice vidíme práve $\Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, takže naozaj platí, že prevrátené vlastné hodnoty matice $\mathbf{\Phi}$ sú koreňmi autoregresného polynómu. Naopak, ak $\frac{1}{\lambda}$ je koreň autoregresného polynómu, tak spĺňa rovnicu (11) a tým pádom aj (9) pre nejaké $(u_1, u_2, u_3)^\top$ (napríklad $u_3 = 1, u_2 = \lambda$ a $u_1 = \lambda^2$), takže je to naozaj vlastná hodnota $\mathbf{\Phi}$.

2. Ak by $v_1 = 0$, tak
$$\begin{pmatrix} 0 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}.$$

   Z prvej rovnice potom dostávame
$$0 \cdot \phi_1 + v_2 \cdot 1 + v_3 \cdot 0 = 0,$$
   čiže $v_2 = 0$ a následne z druhej rovnice
$$0 \cdot \phi_2 + v_2 \cdot 0 + v_3 \cdot 1 = \lambda v_2 = 0,$$
   čiže aj $v_3 = 0$, čo je spor s tým, že v je nenulový. □

Lema 2. Ak má $\Phi(z)$ koreň v jednotkovom kruhu, tak $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ nie je stacionárny (a teda to ani nemôže byť kauzálny lineárny proces).

Dôkaz. Položme $Z_t \equiv (X_t, X_{t-1}, X_{t-2})$ a $\eta_t \equiv (W_t, 0, 0)$. Zjavne platí
$$Z_t = \mathbf{\Phi} Z_{t-1} + \eta_t \tag{12}$$
(prvá rovnica z predpisu AR(3) procesu a zvyšné dve triviálne). Keďže $\Phi(z)$ má koreň v jednotkovom kruhu, tak existuje vlastná hodnota $\lambda^\star \in \mathbb{C}$ matice $\mathbf{\Phi}$, že $|\lambda^\star| \geq 1$ (viď predchádzajúca lema). Označme $v^\top$ riadkový vlastný vektor prislúchajúci k vlastnej hodnote $\lambda^\star$. Platí
$$v^\top Z_t = v^\top \mathbf{\Phi} Z_{t-1} + v^\top \eta_t = \lambda^\star v^\top Z_{t-1} + v^\top \eta_t,$$
a teda aj
$$D(v^\top Z_t) = D(\lambda^\star v^\top Z_{t-1} + v^\top \eta_t) = |\lambda^\star|^2 D(v^\top Z_{t-1}) + D(v^\top \eta_t)$$
(Z_{t-1} a η_t sú z definície AR procesu nezávislé, preto disperziu súčtu môžeme zapísať ako súčet disperzií; $\lambda^\star$ môže byť aj komplexné číslo, preto pred disperziu ide absolútna hodnota umocnená na druhú - štandardne by samozrejme stačilo umocnenie na druhú). Z vlastností disperzie potom dostávame
$$v^\top Var(Z_t) v = |\lambda^\star|^2 v^\top Var(Z_{t-1}) v + v^\top Var(\eta_t) v.$$
Druhý sčítanec je kladný pretože prvý prvok vektora v musí byť nenulový (viď predchádzajúca lema) a
$$Var(\eta_t) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Keďže $|\lambda^\star| \geq 1$, tak dostávame
$$v^t Var(Z_t) v = |\lambda^\star|^2 v^\top Var(Z_{t-1}) v + v^\top Var(\eta_t) v > v^t Var(Z_t) v,$$
čo sa ale v stacionárnom časovom rade nemôže stať (v takom musí platiť $Var(Z_t) = Var(Z_{t-1})$, čiže aj $v^t Var(Z_t) v = v^t Var(Z_{t-1}) v$). □

Lema 3. Položme $\psi_j \equiv \left(\mathbf{\Phi}^j\right)_{11}$ (čiže prvok matice $\mathbf{\Phi}^j$ v prvom riadku a prvom stĺpci). Pre $j \geq 1$ platí rekurzia
$$\psi_j = \phi_1 \psi_{j-1} + \phi_2 \psi_{j-2} + \phi_3 \psi_{j-3} \tag{13}$$
s počiatočnými podmienkami $\psi_0 = 1, \psi_{-1} = \psi_{-2} = 0$ (viď Veta 1, za p sme položili $p = 3$).

Dôkaz. Pre prvý stĺpec matice $\mathbf{\Phi}^j$ (označme ho $c^{(j)} = \left(c_1^{(j)}, c_2^{(j)}, c_3^{(j)}\right)^\top$) platí

- $c^{(0)} = (1, 0, 0)^\top$ (triviálne),

- $c^{(j)} = \left(\phi_1 c_1^{(j-1)} + \phi_2 c_2^{(j-1)} + \phi_3 c_3^{(j-1)}, c_1^{(j-1)}, c_2^{(j-1)}\right)^\top$ - ukážeme indukciou, t.j predpokladáme, že to platí pre $j-1$ a chceme to ukázať pre j. Pre $\mathbf{\Phi}^j$ platí

$$\mathbf{\Phi}^j = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Phi}^{j-1} = \begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^{(j-1)} & \dots & \dots \\ c_2^{(j-1)} & \dots & \dots \\ c_3^{(j-1)} & \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 c_1^{(j-1)} + \phi_2 c_2^{(j-1)} + \phi_3 c_3^{(j-1)} & \dots & \dots \\ c_1^{(j-1)} & \dots & \dots \\ c_2^{(j-1)} & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Pre $j \geq 1$ teda máme

$$c_1^{(j)} = \phi_1 c_1^{(j-1)} + \phi_2 c_2^{(j-1)} + \phi_3 c_3^{(j-1)} \tag{14}$$
$$c_2^{(j)} = c_1^{(j-1)} \tag{15}$$
$$c_3^{(j)} = c_2^{(j-1)}. \tag{16}$$

Keďže $\mathbf{\Phi}^0$ je identická matica, zo (14) máme

$$\psi_1 = c_1^{(1)} = \phi_1 c_1^{(0)} + \phi_2 c_2^{(0)} + \phi_3 c_3^{(0)} = \phi_1 \cdot 1 + \phi_2 \cdot 0 + \phi_3 \cdot 0 = \phi_1\psi_0 + \phi_2\psi_{-1} + \phi_3\psi_{-2}.$$

Z (15) máme $c_2^{(1)} = c_1^{(0)} = 1$ a z (16) zase máme $c_3^{(1)} = c_2^{(0)} = 0$, po dosadení do (14) potom dostaneme

$$\psi_2 = c_1^{(2)} = \phi_1 c_1^{(1)} + \phi_2 c_2^{(1)} + \phi_3 c_3^{(1)} = \phi_1\psi_1 + \phi_2 \cdot 1 + \phi_3 \cdot 0 = \phi_1\psi_1 + \phi_2\psi_0 + \phi_3\psi_{-1}.$$

Pre $j \geq 3$ máme z (15) $c_2^{(j-1)} = c_1^{(j-2)}$ a z (16)+(15) $c_3^{(j-1)} = c_2^{(j-2)} = c_1^{(j-3)}$. Po dosadení do (14)

$$\psi_j = c_1^{(j)} = \phi_1 c_1^{(j-1)} + \phi_2 c_2^{(j-1)} + \phi_3 c_3^{(j-1)} = \phi_1 c_1^{(j-1)} + \phi_2 c_1^{(j-2)} + \phi_3 c_1^{(j-3)} = \phi_1\psi_{j-1} + \phi_2\psi_{j-2} + \phi_3\psi_{j-3}.$$

□

Lema 4. Ak pre každú vlastnú hodnotu λ matice $\mathbf{\Phi}$ platí $|\lambda| < 1$, tak $\mathbf{\Phi}^k \to \mathbf{0}$ pre $k \to \infty$ ($\mathbf{0}$ je nulová matica).

Dôkaz. Iba náznak dôkazu - matica $\mathbf{\Phi}$ sa dá zapísať ako $\mathbf{\Phi} = P^{-1}JP$ (Jordanov rozklad), kde P je nejaká regulárna matica a J je bloková, horná trojuholníková matica, ktorá má iba na hlavnej diagonále vlastné hodnoty a na vedľajšej (hornej) diagonále jednotky alebo nuly (inde sú nuly). Potom

$$\mathbf{\Phi}_k = P^{-1}JPP^{-1}JP \dots P^{-1}JP = P^{-1}J^kP$$

a z tvaru J vyplýva, že $J^k \to \mathbf{0}$ (lebo na diagonále sú hodnoty v absolútnej hodnote menšie ako 1), čiže aj $\mathbf{\Phi}^k \to \mathbf{0}$. □

Dôkaz (Vety 1)**.** Implikácia „$\Rightarrow$" je dôsledkom Lemy 2 (Lema 2 je iba obmenou tejto implikácie). Pre implikáciu „$\Leftarrow$" použime označenie z Lemy 2 a zápis $Z_t = \mathbf{\Phi}Z_{t-1} + \eta_t$. Podobne ako pri AR(1) procese môžeme tento vzťah ďalej rozpísať ako

$$Z_t = \mathbf{\Phi}Z_{t-1} + \eta_t = \mathbf{\Phi}\underbrace{(\mathbf{\Phi}Z_{t-2} + \eta_{t-1})}_{Z_{t-1}} + \eta_t = \mathbf{\Phi}^2 Z_{t-2} + \mathbf{\Phi}\eta_{t-1} + \eta_t = \mathbf{\Phi}^2\underbrace{(\mathbf{\Phi}Z_{t-3} + \eta_{t-2})}_{Z_{t-2}} + \mathbf{\Phi}\eta_{t-1} + \eta_t =$$

$$= \mathbf{\Phi}^3 Z_{t-3} + \mathbf{\Phi}^2\eta_{t-2} + \mathbf{\Phi}\eta_{t-1} + \eta_t = \dots = \mathbf{\Phi}^k Z_{t-k} + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{\Phi}^j \eta_{t-j}$$

pre ľubovoľné prirodzené číslo k. Pripomeňme, že $Z_t = (X_t, X_{t-1}, X_{t-2})^\top$ a $\eta_t = (W_t, 0, 0)^\top$. Ak sa pozrieme iba na prvý riadok tejto maticovej rovnice, tak dotávame

$$X_t = \left(\mathbf{\Phi}^k Z_{t-k}\right)_1 + \sum_{j=0}^{k-1} \left(\mathbf{\Phi}^j \eta_{t-j}\right)_1.$$

O prvom sčítanci z Lemy 4 vieme, že konverguje do nuly. Pre zvyšné sčítance platí

$$\left(\mathbf{\Phi}^j \eta_{t-j}\right)_1 = \left(\mathbf{\Phi}^j\right)_{1\cdot} \begin{pmatrix} W_{t-j} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\mathbf{\Phi}^j\right)_{11} W_{t-j} = \psi_j W_{t-j}$$

(viď označenie z Lemy 3). Vieme teda písať

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j W_{t-j}.$$

Na to, aby to bol kauzálny lineárny proces ešte musíme ukázať, že $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$. Z Lemy 3 vieme, že pre ψ_j platí $\psi_j = \phi_1\psi_{j-1} + \phi_2\psi_{j-2} + \phi_3\psi_{j-3}$ - ak teda chceme nájsť explicitné vyjadrenie pre ψ_j, musíme nájsť korene charakteristického polynómu

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \phi_1\lambda^2 - \phi_2\lambda - \phi_3.$$

Pre korene λ_i, $i = 1, 2, 3$ platí

$$\lambda_i^3 - \phi_1\lambda_i^2 - \phi_2\lambda_i - \phi_3 = 0$$

(z definície) a po predelení číslom λ_i^3 (keďže $\phi_3 \neq 0$, tak λ_i nemôže byť 0 - hore uvedená rovnica by neplatila)

$$\Phi\left(\frac{1}{\lambda_i}\right) = 1 - \phi_1\frac{1}{\lambda_i} - \phi_2\frac{1}{\lambda_i^2} - \phi_3\frac{1}{\lambda_i^3} = 0,$$

teda platí $|\lambda_i| < 1$ pre každé i. Bez ujmy na všeobecnosti predpokladajme, že $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$. Presný tvar ψ_j závisí od toho, či sú niektoré lambdy rovnaké, avšak v každom prípade môžeme $|\psi_j|$ ohraničiť pomocou

$$\begin{aligned} |\psi_j| &\leq c\left(|\lambda_1|^j + j|\lambda_1|^j + j^2|\lambda_1|^j + |\lambda_2|^j + j|\lambda_2|^j + j^2|\lambda_2|^j + |\lambda_3|^j + j|\lambda_3|^j + j^2|\lambda_3|^j\right) \leq \\ &\leq 9cj^2|\lambda_1|^j, \end{aligned}$$

kde c je nejaká konštanta (napríklad $\max(c_1, c_2, c_3)$, viď rekurentné vzťahy z prvej strany). Pre $|\psi_j|$ platí

$$\limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{|\psi_j|} = \limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{9cj^2|\lambda_1|^j} = \limsup_{j\to\infty} \sqrt[j]{9cj^2|\lambda_1|^j} = \limsup_{j\to\infty} |\lambda_1|\sqrt[j]{9cj^2} = |\lambda_1| < 1,$$

čo je jedno z kritérií konvergencie nekonečného radu. Naozaj teda platí $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$, takže časový rad $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$ je naozaj kauzálny lineárny proces. $\square$