MP 8.10.2025

streda 8. októbra 2025 16:51

5.2.3.

a) $H = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & -4 & -12 \\ 0 & -7 & -21 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1/4) \\ \cdot(-1/7) \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

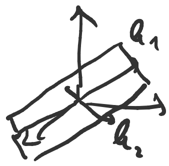
$\Downarrow$ $\operatorname{rank}(H) = 2$

$\mathcal{C}(H) = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

b) $Hx = b$: má rieš. pre $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$a_1 + a_2$

c) $Hx = b$ nemá rieš.



$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 7 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & -4 & -12 & -1 \\ 0 & -7 & -21 & -2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & -4 & -12 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1/4 \end{array}\right]$

$-\frac{7}{4}\cdot$

$-2 + \frac{7}{4} = \frac{-8+7}{4} = -1/4$

teda nemá rieš.

Prednáška

Minule: • $\mathcal{C}(A) = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$

$=$ všetky LK stĺpcov A

• $\boxed{Ax = b \text{ má riešenie} \iff b \in \mathcal{C}(A)}$

Pr.: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 15 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad 2\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad 5\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right] = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}}_{T} = \begin{bmatrix} 1\cdot[1 \; 2 \; 5] \\ 3\cdot[1 \; 2 \; 5] \end{bmatrix}$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3$

$\begin{cases} a_2 = 2a_1 \\ a_3 = 5a_1 \end{cases} \Rightarrow \dim \mathcal{C}(A) = 1$

$\operatorname{rank}(A) = 1$

všetky stĺpce sú násobky $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \dim \mathcal{C}(A) = 1$

všetky riadky sú násobky $[1 \; 2 \; 5]$

$\Downarrow$

$\dim \mathcal{C}(A^T) = 1$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{T}$

3x3   3x2   2x3

$a_3 = a_1 + a_2$

overme

$= \begin{bmatrix} 1 & 4 & \vdots \\ 2 & \vdots & \vdots \\ 3 & \vdots & \end{bmatrix}$

$\dim \mathcal{C}(A) = 2$

$\operatorname{rank}(A) = 2$

lin. nez. stĺpce

$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{T} = \begin{bmatrix} 1\cdot[1 \; 0 \; 1] + 4\cdot[0 \; 1 \; 1] \\ 2\cdot[1 \; 0 \; 1] + 5\cdot[0 \; 1 \; 1] \\ 3\cdot[1 \; 0 \; 1] + 5\cdot[0 \; 1 \; 1] \end{bmatrix}$

$\downarrow$

všetky riadky A sú LK $[1 \; 0 \; 1]$ a $[0 \; 1 \; 1]$

$\Rightarrow \dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{C}(A^T)$

$\Rightarrow \dim \mathcal{C}(A^T) = 2$

- pre ľub. A to vieme skonštruovať
  - zoberieme $r = \operatorname{rank}(A)$ lin. nez. stĺpcov A $\Rightarrow$ stĺpce B
  - dopočítame T : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$ v stĺpcoch prislúchajúcim vybraným do B

vyberieme $r = \operatorname{rank}(A)$ lin. nez. stĺpcov A → stĺpce B

– dopočítame T: → $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 1\\ \vdots\end{pmatrix}$ v stĺpcoch prislúchajúcim vybraným do B

→ v ostatných: koeficienty lin. komb., pomocou ktorých ich vieme skonštruovať

<u>Veta</u> (BT rozklad)

Nech $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A \neq 0_{m\times n}$. Označme $\operatorname{rank}(A) = r$. Potom $\exists\, B \in \mathbb{R}^{m\times r}, T \in \mathbb{R}^{r\times n}$: $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(T) = r$, $A = BT$. Navyše pre akékoľvek $B \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $T \in \mathbb{R}^{r\times n}$ také, že $A = BT$, platí $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(T) = r$.

(Bez dôkazu)

<u>Dôsledok</u>: $\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{C}(A^T)$.

→ <u>BT-rozklad</u>: ľub. $B \in \mathbb{R}^{m\times r}$, $T \in \mathbb{R}^{r\times n}$, $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(T) = r$: $A = BT$.

- nie je jednoznačný:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 2 & 5 & 7\\ 3 & 6 & 9\end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{bmatrix}}_{B_1}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}}_{T_1}$$

$a_2 = a_3 - a_1$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 5\\ 2 & 7\\ 3 & 9\end{bmatrix}}_{B_2}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}}_{T_2}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix}2 & 4\\ 4 & 5\\ 6 & 6\end{bmatrix}}_{B_3}\underbrace{\begin{bmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}}_{T_3}$$

$$= \dots$$

<u>Ďalšie vlastnosti rank</u>:

- $\operatorname{rank}(AB) \le \operatorname{rank}(A)$
  $\le \operatorname{rank}(B)$
- $A: n\times n$, $\operatorname{rank}(A) = n$ → A <u>má plnú hodnosť</u>, je <u>invertovateľná</u>, je <u>regulárna</u>
  ↳ $\exists\, A^{-1}_{n\times n}$: $AA^{-1} = I = A^{-1}A$
- $A: m\times n$ → ak $\operatorname{rank}(A) = m$ ⇒ má <u>plnú riadkovú hodnosť</u> (lin. nez. riadky)
  → ak $\operatorname{rank}(A) = n$ ⇒ má <u>plnú stĺpcovú hodnosť</u> (LN stĺpce)

$$A: \begin{array}{cc} m & \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \\ & n \end{array}$$

- $\operatorname{rank}(\underset{m\times n}{A}) \le m$
  $\le n$

- $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – je regul. ⇔ $\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^n$ ⇔ $Ax = b$ má rieš. $\forall b \in \mathbb{R}^n$
- $\underbrace{A}_{m\times n}x = b$ má rieš. $\forall b \in \mathbb{R}^m$ ⇔ $\mathcal{C}(\underbrace{A}_{m\times n}) = \mathbb{R}^m$ ⇔ $\operatorname{rank}(A) = m$ ($A \in \mathbb{R}^{m\times n}$)
  ⇔ A má plnú riadkovú hodnosť

vzťah medzi dvoma $\mathcal{C}$:

$$\underset{m\times n\ \ n\times q}{AB} = \begin{bmatrix} Ab_1 & \dots & Ab_q \end{bmatrix} \longrightarrow Ab_i \in \mathcal{C}(A)\ \forall i$$

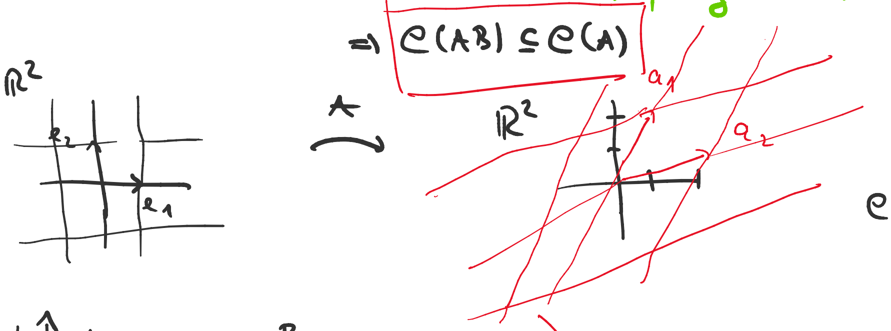
Ab_1: LK stĺpcov A, Ab_q: LK stĺpcov A

$\Rightarrow \underbrace{c_1 \cdot Ab_1 + \dots + c_q \cdot Ab_q}_{\text{presne lin. komb. stĺpcov } AB \text{ : prvky } \mathcal{C}(AB)} \in \mathcal{C}(A)\ \ \forall c_1, \dots, c_q \in \mathbb{R}$

lebo $\mathcal{C}(A)$ je VPP

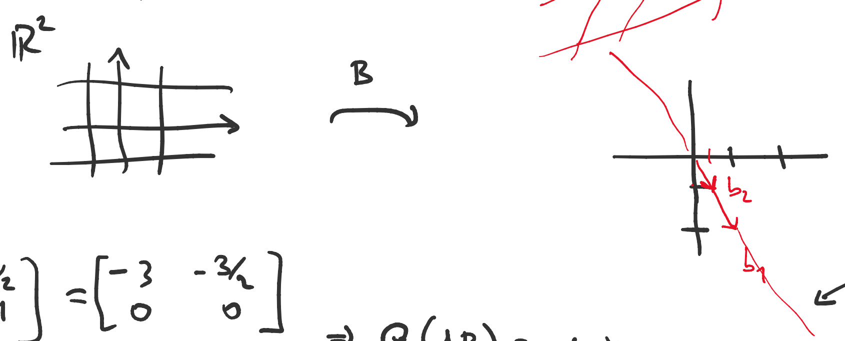
$\Rightarrow \boxed{\mathcal{C}(AB) \subseteq \mathcal{C}(A)}$

Príklad: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\underline{2\times 2}$



$\mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^2$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

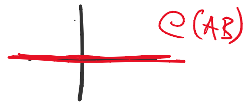


algebraicky:

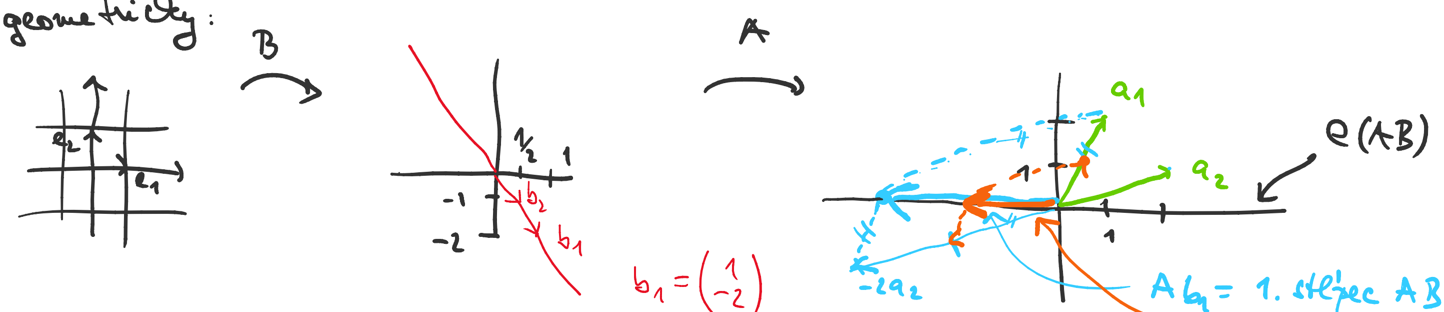
$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \mathcal{C}(AB) =$ os x

$= \left\{ \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, c \in \mathbb{R} \right\}$



geometricky:



$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $Ab_1 = 1 \cdot a_1 + (-2) a_2$

$b_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad Ab_2 = \frac{1}{2} a_1 - a_2$

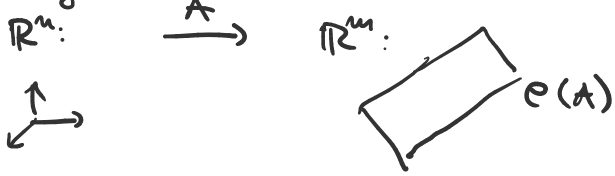
$Ab_1 =$ 1. stĺpec AB

$Ab_2 =$ 2. stĺpec AB

$\Rightarrow \mathcal{C}(AB) \subseteq \mathcal{C}(A)$, lebo A nakoniec malo menej vstupov: vedelo pokryť iba časť svojho $\mathcal{C}$

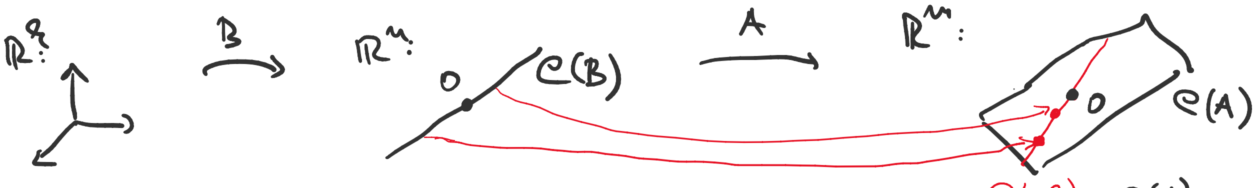
všeobecne: schematicky

$A:\ \underline{m} \times \underline{n}$



$B:\ \underline{n} \times \underline{q}$

AB :



$\mathcal{C}(AB) \subseteq \mathcal{C}(A)$

- $b \in \mathcal{C}(A) \iff \underbrace{Ax = b \text{ má rieš.}}_{\exists x \in \mathbb{R}^n \,:\, b = Ax}$

- Kedy $\underset{m\times k}{\mathcal{C}(B)} \subseteq \underset{m\times n}{\mathcal{C}(A)}$? $\iff \exists \underset{n\times k}{X} : \underset{m\times k}{B} = \underset{m\times n}{A}\,\underset{n\times k}{X}$?

vyššie!

$\mathcal{C}(AB) \subseteq \mathcal{C}(A)$ ... pretvarme: $\mathcal{C}(\underbrace{AX}_{B}) \subseteq \mathcal{C}(A)$ $\forall X$ rozumných rozmerov

↳ týmto je dokázané "$\Leftarrow$"

"$\Rightarrow$" $\mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}(A)$

$B = [b_1 \dots b_k]$ $\quad$ $\mathcal{C}(B)$ je množ. LK stĺpcov B

$\Rightarrow b_i \in \mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}(A) \Rightarrow \exists x_i \in \mathbb{R}^n : b_i = Ax_i \quad \forall i$

$$\Rightarrow B = [b_1 \dots b_k] = [Ax_1 \dots Ax_k] = A\underbrace{[x_1 \dots x_k]}_{X} = AX. \quad \blacksquare$$

$\Rightarrow$ **Veta**: Nech $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$. Potom $\mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}(A) \iff \exists X \in \mathbb{R}^{n\times k} : B = AX$.

Dôkaz: vyššie. $\blacksquare$

↑ základná veta o inklúzii stĺpcových priestorov (ZV)

- pre $b \in \mathbb{R}^m$: $\underbrace{\mathcal{C}(b)}_{\text{všetky násobky } b} \subseteq \mathcal{C}(A) \iff \exists x \in \mathbb{R}^n : b = Ax$

$\iff b \in \mathcal{C}(A)$

- priame použitie ZV:

$$\begin{aligned} \underset{m\times n}{A}\,\underset{n\times 1}{x_1} &= \underset{m\times 1}{b_1} \\ &\vdots \\ A x_k &= b_k \end{aligned} \iff [Ax_1, \dots, Ax_k] = [b_1, \dots, b_k]$$

$$\Updownarrow$$

$$A\underbrace{[x_1 \dots x_k]}_{X} = \underbrace{[b_1 \dots b_k]}_{B}$$

$$\Updownarrow$$

$\underset{m\times n}{A}\,\underset{n\times k}{X} = \underset{m\times k}{B}$: maticový systém lin. rovníc

$\Rightarrow$ ZV: $AX = B$ má riešenie $\iff \mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}(A)$

- $AX = B$ má riešenie : systém je konzistentný