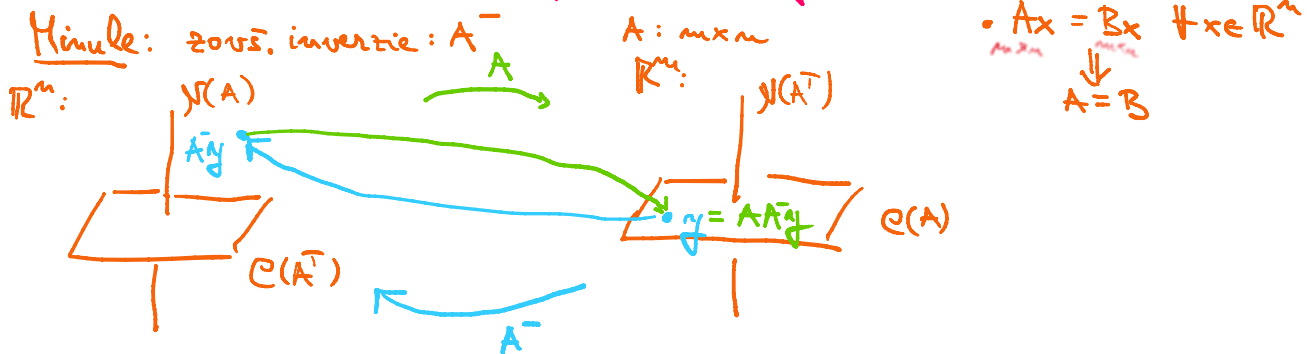


• 25.11.: príručka → info na stránke



Dnes: $y = AA^-y \quad \forall y \in C(A)$

$\Leftrightarrow y = \underbrace{Ax}_{\substack{\text{pre } x \in \mathbb{R}^n \\ m \times n}}$

$A^-: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow A^-: n \times m$

$Ax = AA^-Ax \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\uparrow$ tototivanie

$A = AA^-A$

Def.: Zovšeobecnenou inverziou matice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je ľub. $G \in \mathbb{R}^{n \times m}$,
kt. spĺňa $AGA = A$. (generalized inverse)

- nešpecifikovali sme správanie na $C(A^T), N(A), N(A^T) \Rightarrow$ zovš. inv. nemusí byť jednoznačná
- ľub. zovšeobecnenú inv. značíme A^-
- množ. všetkých A^- pre danú A značíme $G^-(A)$.

Príklady:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AGA = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$

$2 \times 3 \quad 3 \times 2 \quad 2 \times 2 \quad 2 \times 3$

$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} = A \quad \checkmark \Rightarrow G \in G^-(A)$

$\Rightarrow G$ môžeme značiť A^- :

$A^- = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ← jedna zo zovš. inv. je táto

• $A = 0_{m \times n}$

$AGA = A \Rightarrow G^-(0_{m \times n}) = \mathbb{R}^{n \times m}$

$0 \cdot G \cdot 0 = 0$

$m \times n \quad n \times m \quad m \times n$

$m \times m$

$0 = 0$

Všetchni: $A: m \times n$

potí: $AGA = A$

max

$$0 = 0$$

Vlastnosti: $A: m \times n$

$$G \in G^-(A) \Rightarrow c^{-1}G \in G^-(cA) \dots [\exists (cA)^- = c^{-1}A^-]$$

$$\text{poch': } AGA = A \\ \leftarrow \cancel{cA} \cdot \cancel{c^{-1}}G \cdot cA = \underbrace{cAGA}_{=A} = cA \checkmark$$

$$G \in G^-(A) \Rightarrow G^T \in G^-(A^T) \dots [\exists (A^T)^- = (A^-)^T]$$

$$A^T G^T A^T = (AGA)^T = A^T$$

$$\text{ať } A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \text{ neg.} \Rightarrow G^-(A) = \{A^{-1}\} \\ \dots [A^- = A^{-1} \text{ pre } A-\text{neg.}]$$

$$AGA = A \quad / \cdot A^{-1} \cdot \\ \cancel{A^{-1}}AGA = \cancel{A^{-1}}A \\ GA = I_n \Rightarrow G = A^{-1}$$

$$\text{ať } A \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ a } \rightarrow \text{rank}(A) = m \Rightarrow G^-(A) = \text{všetky prave' inv.} \\ \rightarrow \text{rank}(A) = n \Rightarrow G^-(A) = \text{všetky ľavé inv.}$$

Veta: Nech $B = XAY$, kde X, Y - neg.

$$\text{Potom } \underbrace{Y^{-1}A^{-1}X^{-1}}_G \in G^-(B).$$

$$\dots [\exists (XAY)^- = Y^{-1}A^{-1}X^{-1} \text{ pre } X, Y-\text{neg.}]$$

Dôkaz:

$$\underbrace{BGB}_I = XAY \cdot \cancel{Y^{-1}A^{-1}X^{-1}} \cdot XAY = X \underbrace{AA^{-1}}_I X Y = XAY = B \quad \square$$

Existencia:

BT-rozklad:

$$A = B T$$

$$A: m \times n$$

$$: \text{rank}(A) = n$$

$$\downarrow \\ \exists L: LB = I_n$$

$$\exists R: TR = I_n$$

$$\text{zoberme } G = RL$$

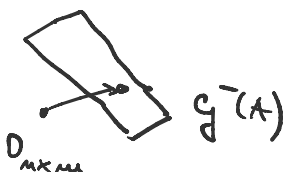
$$\underbrace{AGA}_{=A} = \underbrace{B^T}_{=I} \underbrace{RL}_{=I} \underbrace{B^T}_{=I} = B^T = A$$

$$\Rightarrow \forall A \text{ existuje } A^-$$

$$\text{Veta: } G^-(A) \text{ je afinná. Teda ať } \left. \begin{array}{l} G_1, \dots, G_k \in G^-(A) \\ \alpha_1, \dots, \alpha_k: \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum_{i=1}^k \alpha_i G_i \in G^-(A).$$

Dôkaz: Sú - stačí overiť $A(\sum \alpha_i G_i)A = \dots = A \quad \square$

$$\Rightarrow G^-(A) \text{ je posunutý VPP}$$



Veta: Nech $A \in \mathbb{R}^m$. Potom existuje symetrická $G \in G^-(A)$.

$$[A \in \mathbb{R}^m \Rightarrow \exists A^- \in \mathbb{R}^m]$$

Dôkaz: $\exists G_1 : AG_1A = A \quad /^T$

$\in G^{-}(A) \Rightarrow A^T G_1^T A^T = A^T$

$\underline{AG_1^T A = A} \Rightarrow \alpha_j G_1^T \in G^{-}(A)$

Veta
 $\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2} G_1 + \frac{1}{2} G_1^T}_{\substack{\uparrow \alpha_1 \\ \text{označ. } G}} \in G^{-}(A)$

$G^T = (\frac{1}{2} G_1 + \frac{1}{2} G_1^T)^T = \frac{1}{2} G_1^T + \frac{1}{2} G_1 = G$

$\Rightarrow G^T$ je sym. tovs. int. $\square$

Konstrukcia A^{-}

Predp.: $A : m \times n$, $\text{rank}(A) = r$, $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, $A_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\text{rank}(A_{11}) = r$ (n.j.)

$\Rightarrow \underbrace{A}_{m \times n} \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{n \times n} \underbrace{A}_{m \times n} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ A_{21} A_{11}^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} =$
 $= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} A_{11}^{-1} A_{11} & A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \end{bmatrix} = (*)$

lema: $S = A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}$

$\text{rank}(A) = \text{rank}(S) + \text{rank}(A_{11})$

$r = \text{rank}(S) + r$

$\text{rank}(S) = 0 \Rightarrow S = 0 \dots A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} = 0$

$A_{22} = A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}$

$\Rightarrow (*) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = A$

$\Rightarrow \underline{\underline{\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in G^{-}(A)}}$

pre vŕob. $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\text{rank}(A) = r$:

$\rightarrow \exists r$ LN riadkov

$\rightarrow \exists r$ LN stĺpcov

môžeme riadky a stĺpce permutovať tak, aby tieto boli vľavo hore

$\Rightarrow B = \underbrace{P_1}_{\substack{\uparrow \\ \text{perm. matice}}} A \underbrace{P_2}_{\substack{\uparrow \\ \text{perm. matice}}} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$, $B_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, n.j.

$\Rightarrow \exists B^{-} = \begin{bmatrix} B_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$B = P_1 A P_2 \quad / \cdot P_1^T, P_2^T$

$$B = P_1 A P_2 \quad / \quad P_1^{-1}, P_2^{-1}$$

$$P_1^{-1} B P_2^{-1} = A \quad \Rightarrow \quad \exists A^{-1} = (P_1^{-1} B P_2^{-1})^{-1} \stackrel{\text{veta}}{=} (P_2^{-1})^{-1} B^{-1} (P_1^{-1})^{-1} = P_2 B^{-1} P_1$$

$$\Rightarrow \text{pre v\u0161edol. } A : \boxed{\exists A^{-1} = P_2 B^{-1} P_1}$$

Priklad 1: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 6 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow A_{11} \\ 3 \times 4 \end{matrix}$

$$r_3 = r_1 + r_2 \Rightarrow \text{rank}(A) = 2$$

$$\det(A_{11}) = 1 - 4 = -3 \neq 0 \Rightarrow A_{11} \text{ - inv. } \checkmark$$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{jedna } A^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 4 \times 3 \end{matrix}$$

$$A_{11}^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dots \text{ov\u011bte : } A A^{-1} A = A$$

Priklad 2: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \\ 5 & 15 & 10 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{3x4}]{\text{riadky}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 15 & 10 & 7 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{3x4}]{\text{st\u00eapce } 1-4, 2-3} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 15 & 10 & 7 \\ 2 & 6 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

$$r_2 = 2r_1$$

$$\Rightarrow \text{rank}(A) = 2$$

$$LN \text{ riadky : } 1, 3 \rightarrow P_1$$

$$LN \text{ st\u00eapce : } 1, 4 \rightarrow P_2$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 15 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \leftarrow B_{11} \\ 3 \times 4 \end{matrix}$$

$$\det(B_{11}) = 1 \cdot 7 - 2 \cdot 5 = -3 \neq 0$$

$$B_{11}^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/3 & 2/3 \\ 5/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$B = P_1 A P_2$$

$\Downarrow$

$$\exists A^{-1} = P_2 B^{-1} P_1$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{bmatrix} -7/3 & 2/3 & 0 \\ 5/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 4 \times 3 \end{matrix}$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad 3 \times 3, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

jedna A^{-1} :

$$A^{-1} = P_2 B^{-1} P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7/3 & 2/3 & 0 \\ 5/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot P_1 = \begin{bmatrix} -7/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -7/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5/3 & 0 & -1/3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5/3 & -1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

→ overit, že $AA^+A = A$

Věta o systematické lin. rovnici

Předp.: $AX = B$ má řešení.

$$AA^+A = A$$

→ A - reg. $\Rightarrow X = A^{-1}B$ je řeš.

→ inv. $A \Rightarrow X = A^{-1}B$ je řeš. ?

($n \times n$)

Overme: $AX = AA^+B = \overbrace{AA^+AX_0}^A = AX_0 = B$: ovaj je řeš.

$\exists$ řeš.: označme X_0 : $AX_0 = B$

$\Rightarrow$ Věta: Nechť $AX = B$ je konzistentní. Potom $X = A^+B$ je řešením této soustavy pro lib. A .

Důkaz: výše

Definice: Fundamentální prostor:

$$\mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}(A) \stackrel{zv}{\Leftrightarrow} \exists X: B = AX$$

↓ abo konstruovat X ? $X = A^+B$: výše

$$\Leftrightarrow B = AA^+B$$

Věta: $\mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow B = AA^+B$ pro lib. A .

Pozn.: $\Leftrightarrow B = AA^+B$ pro nějakou A .

Důkaz:

$$" \Leftarrow " \quad B = \underbrace{AA^+B}_{\substack{zv \\ \Rightarrow \mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}(A)}} \quad \checkmark$$

$$" \Rightarrow " \quad \mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}(A) \stackrel{zv}{\Rightarrow} \exists X: B = \underbrace{AA^+A}_{\substack{zv \\ \Rightarrow \mathcal{C}(B) \subseteq \mathcal{C}(A)}} X = AA^+B \quad \square$$

Důsledek 1: $AX = B$ je konzistentní $\Leftrightarrow B = AA^+B$ pro lib. A .

Důsledek 2: zvolíme $B = x$ do věty

$$\hookrightarrow x \in \mathcal{C}(A) \Leftrightarrow x = AA^+x \text{ pro lib. } A$$

$$\Leftrightarrow (I - AA^+)x = 0_n$$

$$\Leftrightarrow x \in \mathcal{N}(I - AA^+)$$

Důsledek 3: $\mathcal{C}(A) = \mathcal{N}(I - AA^+)$ pro lib. A .