

Poznámka: Môžete používať bez dôkazu akékoľvek definície a tvrdenia z prednášok, nie však z cvičení.

Príklad 1. (i) Určte pravdivosť a (ii) dokážte alebo nájdite protipríklad pre nasledujúce tvrdenia:

- a) Nech $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ má ortonormálne riadky. Potom $\|\mathbf{Q}\| = \sqrt{m}$.
- b) Nech $\mathcal{M}$ je množina všetkých $n \times n$ matíc s hodnotou 1. Potom $\mathcal{M}$ je vektorový podpriestor $\mathbb{R}^{n \times n}$.
- c) Nech $\mathbf{A}$ je symetrická matica. Potom $\mathcal{C}(\mathbf{A}^2) = \mathcal{C}(\mathbf{A})$.

Príklad 2. Nech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{n \times n} & \mathbf{J}_{n \times n} \\ \mathbf{1}_n^T & \mathbf{x}^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}\mathbf{x}^T & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{1}_n \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ spĺňa $\sum_{i=1}^n x_i = 0$.

- a) Určte rozmery matíc $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$.
- b) Vypočítajte $\mathbf{AB}$ (výsledok upravte na čo najjednoduchší tvar).

Bonus (1 bod): Akú má $\mathbf{AB}$ hodnotu?

Príklad 3. Nech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 19 \\ -1 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Nájdite **LU** rozklad a aspoň jeden **BT** rozklad matice $\mathbf{A}$. (Pomôcka: pri hľadaní **BT** rozkladu môžete skúsiť využiť **LU** rozklad.)

Príklad 4. Nech

$$\mathcal{C}(\mathbf{A}) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{a} \quad \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

- a) Nájdite (matematicky vyjadrite) $\mathcal{C}(\mathbf{A}^T)$ a $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$.
- b) Aké geometrické útvary sú $\mathcal{C}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{C}(\mathbf{A}^T)$ a $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$?
- c) Nájdite maticu $\mathbf{A}$, ktorá má takýto stĺpcový a nulový priestor.