

Poznámky:

- Všetky vaše výsledky píšete aj s postupmi/zdôvodneniami.
- Môžete používať bez dôkazu akékoľvek tvrdenia z prednášok, nie však z cvičení.

Príklad 1 (10 bodov). (i) Určte pravdivosť a (ii) dokážte alebo nájdite protipríklad pre nasledujúce tvrdenia:

- Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Potom ak systémy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1$ a $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_2$ sú riešiteľné, tak aj systém $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ je riešiteľný.
- Nech λ je vlastnou hodnotou matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Potom je λ aj vlastnou hodnotou matice $\mathbf{QAQ}^T$ pre ľubovoľnú ortogonálnu maticu $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
- Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Potom matica $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ je kladne semidefinitná.
- Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Potom matica $\mathbf{AA}^T$ je kladne semidefinitná.
- Množina všetkých $n \times n$ matíc s hodnotou nanajvyš 2 je vektorový podpriestor priestoru $\mathbb{R}^{n \times n}$.

Príklad 2 (8 bodov). Nech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Nájdite singulárny rozklad matice $\mathbf{A}$ alebo jej úzky singulárny rozklad (môžete si vybrať).
- Nájdite $\mathbf{A}^+$ (aj ju dopočítajte).

Príklad 3. (5 bodov)

- Nájdite projekčnú maticu $\mathbf{P}$ rozmeru 3×3 a hodnoti 1, pre ktorú platí $\mathbf{P}\mathbf{1}_3 = \mathbf{1}_3$.
- Nájdite projekčnú maticu $\mathbf{P}$ rozmeru 3×3 a hodnoti 2, pre ktorú platí $\mathbf{P}\mathbf{1}_3 = \mathbf{1}_3$.

Keď neviete vyriešiť ani jedno z a)-b), tak aspoň nájdite ľubovoľnú projekčnú maticu $\mathbf{P}$, pre ktorú platí $\mathbf{P}\mathbf{1}_3 = \mathbf{1}_3$.

Príklad 4 (4 body). Nech $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sú vlastné čísla matice $\mathbf{A} \in \mathcal{S}^n$ (vrátane násobností). Vyjadrite $\det(\mathbf{A})$ pomocou jej vlastných čísel. *Pomôcka:* môžete využiť spektrálny rozklad.

Príklad 5 (3 body). Dokážte, že ak $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sú navzájom kolmé matice (t.j. skalárny súčin matíc $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ je 0), tak $\|\mathbf{A}\|^2 + \|\mathbf{B}\|^2 = \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\|^2$.