Ďalšie príklady

Príklad Ď.1.1. Nech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 13 \\ 4 & 7 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ukážte, že $\mathbf{A} = \mathbf{BT}$. Na zamyslenie: čo tento fakt hovorí o stĺpcoch matice $\mathbf{A}$?

Príklad Ď.1.2. Nech

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Vypočítajte $\mathbf{X}^T\mathbf{Y}$, $\mathbf{PX}$, $\mathbf{PY}$, $\mathbf{P}^2$ (v zmysle $\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}$).

b) Slovne opíšte, čo s vektorom $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ robí matica $\mathbf{P}$. (Možno pomôže: zamyslite sa, čo s vektorom $\mathbf{x}$ robí matica $\mathbf{J}_{3\times3}/3$ a aký je vzťah medzi $\mathbf{P}$ a touto maticou.)

Na zamyslenie: výsledky v časti a) sú veľmi špecifické. Vedeli by ste niektoré z nich (intuitívne) vysvetliť?

Príklad Ď.1.3. Nech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 12/7 & 5/7 \\ 1 & 6/7 \\ -1/7 & -3/7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 35 & 14 & -42 & 21 \\ -49 & 70 & 56 & -7 \end{pmatrix}.$$

Vypočítajte $\mathbf{AB}$. (Môže byť užitočné sa zamyslieť, ako si výpočet čo najviac zjednodušiť.)

Príklad Ď.1.4. Nech

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Vypočítajte $\mathbf{x}^T\mathbf{y}$ a $\mathbf{x}\mathbf{y}^T$.

Príklad Ď.1.5. Nech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je lineárne. Nájdite maticu $\mathbf{A}$ spĺňajúcu $f(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$ pre každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ a overte, že zvolená matica ozaj spĺňa $f(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax}$.

Príklad Ď.1.6. Nech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zodpovedá rotácii o $90°$ okolo $\mathbf{0}_2$ proti smeru hodinových ručičiek. **a)** Vyjadrite maticu $\mathbf{Q}$ zodpovedajúcu tejto rotácii. **b)** Nájdite maticu $\mathbf{Q}^{-1}$ spĺňajúcu $\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q} = \mathbf{I}$.

Príklad Ď.1.7. a) Nech $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ spĺňa

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Môže byť zobrazenie f lineárne? Ak áno, určte čomu je rovné $f(\mathbf{x})$ pre $\mathbf{x} = (3, 1, 1)^T$. Čomu môže byť rovné $f((1, 0, 0)^T)$ ak f je lineárne?

b) Nech $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ spĺňa

$$g(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad g(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad g(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Môže byť zobrazenie g lineárne? Ak áno, určte čomu je rovné $g(\mathbf{x})$ pre $\mathbf{x} = (3, 1, 1)^T$. Čomu môže byť rovné $g((1, 0, 0)^T)$ ak g je lineárne?

Príklad Ď.1.8. Vyjadrite maticu rotácie o uhol α v $\mathbb{R}^2$ okolo $\mathbf{0}_2$ v smere hodinových ručičiek.

Príklad Ď.1.9. Nech $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je maticou nejakej rotácie v $\mathbb{R}^n$ okolo $\mathbf{0}_n$. Čo najviac viete povedať o stĺpcoch $\mathbf{Q}$?

Príklad Ď.1.10. Nech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Čo robí (geometricky) s priestorom $\mathbb{R}^2$ matica $\mathbf{A}$? Čo robí matica $\mathbf{C}$?

b) Geometricky zdôvodnite, že $\mathbf{CA} = \mathbf{I}_2$, vykreslite teda $\mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{Ae}_1 \mapsto \mathbf{C}(\mathbf{Ae}_1)$ a $\mathbf{e}_2 \mapsto \mathbf{Ae}_2 \mapsto \mathbf{C}(\mathbf{Ae}_2)$.

c) Geometricky aj zdôvodnite, že $\mathbf{AC} = \mathbf{I}_2$.

Príklad Ď.1.11.

a) Znázornite/vyjadrite, ako nasledovné matice transformujú priestor (napr. vykreslite transformovaný súradnicový systém).

b) Určte množinu všetkých možných obrazov pre tieto matice (teda všetky dosiahnuteľné $\mathbf{Ax}$, $\mathbf{Bx}$ atď.).

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Vypočítajte $\mathbf{DCx}$ pre každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ a výsledok zdôvodnite.

Príklad Ď.2.1. Čo robí s maticou jej vynásobenie diagonálnou maticou zľava (sprava)?

Príklad Ď.2.2. Nech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Geometrickými úvahami nájdite maticu $\mathbf{C}$, ktorá spĺňa $\mathbf{CA} = \mathbf{I}_2$, resp. $\mathbf{AC} = \mathbf{I}_2$.

Príklad Ď.2.3. Nech

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Určte $\mathcal{C}(\mathbf{H})$.

b) Nájdite aspoň štyri rôzne vektory $\mathbf{b}$, pre ktoré $\mathbf{Hx} = \mathbf{b}$ má riešenie.

c) Nájdite taký vektor $\mathbf{b}$, pre ktorý $\mathbf{Hx} = \mathbf{b}$ nemá riešenie.

Príklad Ď.2.4. Nech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Vyjadrite a nakreslite $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ a $\mathcal{C}(\mathbf{A}^T)$. Akú má $\mathbf{A}$ hodnosť?

Príklad Ď.2.5. Nech
$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & 11 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$
Určte rank($\mathbf{E}$) a $\mathcal{C}(\mathbf{E})$. Priestor $\mathcal{C}(\mathbf{E})$ aj načrtnite. Nájdite aspoň tri rôzne bázy priestoru $\mathcal{C}(\mathbf{E})$.

Príklad Ď.2.6. Nech
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 0 & 7 & -14 \\ 1 & -3 & 11 \end{pmatrix}$$
Určte rank($\mathbf{A}$) a $\mathcal{C}(\mathbf{A})$. Priestor $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ aj načrtnite. Nájdite aspoň tri rôzne bázy priestoru $\mathcal{C}(\mathbf{A})$.

Príklad Ď.2.7. Nech p je priamka určená vektorom $(1, 2, 3)^T$, teda
$$p = \{c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{R}\}.$$

a) Nájdite maticu $\mathbf{A}$ spĺňajúcu $\mathcal{C}(\mathbf{A}) = p$.

b) Aké rozmery môže mať matica $\mathbf{A}$ spĺňajúca $\mathcal{C}(\mathbf{A}) = p$? Nájdite ďalšie tri matice $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ ktoré spĺňajú $\mathcal{C}(\mathbf{A}_i) = p$ $(i = 2, 3, 4)$ ale všetky majú rôzne rozmery (a aj rôzne od matice $\mathbf{A}$).

c) Vykonajte a) a b) pre situáciu, keď p je rovina daná vektormi $(1, 2, 3)^T$ a $(4, 5, 6)^T$, teda
$$p = \{c \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \mid c, d \in \mathbb{R}\}$$

Pod "$\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ majú rôzne rozmery" myslíme, že aspoň jeden z rozmerov majú $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ navzájom iný, napr. $\mathbf{A}$ je typu 5×8 a $\mathbf{B}$ je typu 9×8.

Príklad Ď.2.8 (na zamyslenie)**.** Prvky 2×2 matice $\mathbf{A}$ volíme nasledovne: každý prvok matice $\mathbf{A}$ nezávisle zvolíme ako náhodné číslo od 0 po 1 (napr. funkciou `runif` v Rku). S akou pravdepodobnosťou bude táto matica regulárna (teda s akou pravdepodobnosťou bude mať lineárne nezávislé stĺpce)? Ako to bude pre všeobecnú $n \times n$ maticu?

Príklad Ď.2.9. Nech
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Vyjadrite a nakreslite $\mathcal{C}(\mathbf{A})$, $\mathcal{C}(\mathbf{B})$ a $\mathcal{C}(\mathbf{AB})$, a určte dimenzie týchto priestorov.

Príklad Ď.2.10 (na zamyslenie)**.** Aké musia mať matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ a $\mathbf{AB}$ rozmery, aby mohlo platiť, že násobenie matíc zodpovedá skladaniu lineárnych zobrazení (zdôvodnite teda, že $[m \times n] \cdot [n \times k] = [m \times k]$)? Určte teda, aké musia mať tieto matice rozmery, aby zobrazenie $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{ABx}$ pre $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$ zodpovedalo zloženiu zobrazení $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{A}(\mathbf{Bx})$.

Príklad Ď.2.11. Pre $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ vieme, že $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ má práve jedno riešenie, pokiaľ rank($\mathbf{A}$) $= n$; a ak rank($\mathbf{A}$) $< n$, tak tento systém buď nemá riešenie (ak $\mathbf{b} \notin \mathcal{C}(\mathbf{A})$), alebo má nekonečne veľa riešení (ak $\mathbf{b} \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$). Tiež vieme, že ak $\mathbf{A}$ je regulárna, tak $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ má vždy (práve jedno) riešenie bez ohľadu na $\mathbf{b}$.

Podobnými úvahami ako na prednáške (napr. o (ne)závislosti stĺpcov, tvare $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ apod.) odvoďte, ako je to pre $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, keď $m \neq n$. Teda kedy má $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ jedno, kedy žiadne, kedy nekonečne veľa riešení, a pre akú $\mathbf{A}$ má $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ vždy aspoň jedno riešenie bez ohľadu na $\mathbf{b}$.

Príklad Ď.2.12. Určte pravdivosť a dokážte alebo nájdite protipríklad pre nasledujúce tvrdenia:

a) Ak $\mathcal{C}(\mathbf{X}) = \mathcal{C}(\mathbf{Y})$ pre $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, potom $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$.

b) Nech $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Ak $\mathbf{Ax} = \mathbf{Bx}$ pre každé $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, potom $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

c) Nech $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Ak $\mathbf{AC} = \mathbf{BC}$, potom $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

Príklad Ď.2.13. Určte, či existujú také matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$, ktoré spĺňajú nasledovné podmienky. Ak existujú, tak také matice nájdite.

a) $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = 2$, $\mathrm{rank}(\mathbf{AB}) = 3$;

b) $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = 2$, $\mathrm{rank}(\mathbf{AB}) = 2$;

c) $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = 2$, $\mathrm{rank}(\mathbf{AB}) = 1$;

d) $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = 2$, $\mathrm{rank}(\mathbf{AB}) = 0$.

Príklad Ď.3.1. a) Nech $n \in \mathbb{N}$ a

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{1}_n \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{1}_n \end{pmatrix}.$$

Aké sú rozmery matice $\mathbf{A}$? Vypočítajte $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$.

b) Nech $k \geq 2$ a

$$\mathbf{A}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{1}_n \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{1}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{kn\times kn},$$

teda v $\mathbf{A}_k$ sa k-krát opakuje "riadok" $(\mathbf{I}_n, \mathbf{1}_n)$. Vypočítajte $\mathbf{A}_k^T\mathbf{A}_k$.

Príklad Ď.3.2. Nájdite aspoň dva **BT**-rozklady matice

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Príklad Ď.3.3. Nech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nájdite jej **BT**-rozklad. Viete nájsť aj nejaký iný **BT**-rozklad matice $\mathbf{A}$?

Príklad Ď.3.4. Sformulujte metódu konštrukcie **BT**-rozkladu, keď nezačneme so stĺpcami, ale s riadkami: teda keď najprv nájdeme lineárne nezávislé riadky matice a tie dáme do matice $\mathbf{T}$. Aplikujte tiež túto metódu na niektorú z matíc $\mathbf{A}$ z ostatných príkladov.

Príklad Ď.3.5. Nájdite **BT**-rozklad matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 5 & 2 & 4 \\ 5 & -1 & 13 \\ 7 & 0 & 14 \end{pmatrix}.$$

Nájdite tiež nekonečne veľa **BT**-rozkladov tejto matice.

Príklad Ď.3.6. Dokážte, že $\mathcal{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \subseteq \mathcal{C}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ a $\mathrm{rank}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leq \mathrm{rank}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ pre ľubovoľné $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. (Pod $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ myslíme blokovú maticu s blokmi $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ v riadku vedľa seba.)

Príklad Ď.3.7. Nech
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$
Vyjadrite a zakreslite $\mathcal{N}(\mathbf{A})$. Určte, či $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ je riešiteľné, nájdite jedno riešenie $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ a nájdite (a vykreslite) všetky riešenia $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Príklad Ď.3.8. Nech
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Určte $\operatorname{rank}(\mathbf{A})$. Určte a vykreslite $\mathcal{C}(\mathbf{A})$, $\mathcal{C}(\mathbf{A}^T)$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ a $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$ (použite iba dva obrázky).

Príklad Ď.3.9. Určte hodnosti, a určte a vykreslite štyri základné priestory (viď Ď.3.8) pre nasledujúce matice (každej matici vykreslite samostatnú dvojicu obrázkov):
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$
Tip: pri obrázkoch v $\mathbb{R}^3$ sa snažte nastaviť (otočiť/poprehadzovať) súradnicové osi tak, aby sa dali skúmané podpriestory relatívne pekne vykresliť.

Príklad Ď.3.10. Nájdite matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, pre ktoré platí:

a) $\dim(\mathcal{C}(\mathbf{A})) = 2$, $\dim(\mathcal{C}(\mathbf{AB})) = 1$,

b) $\dim(\mathcal{C}(\mathbf{A})) = 1$, $\dim(\mathcal{C}(\mathbf{B})) = 1$, $\dim(\mathcal{C}(\mathbf{AB})) = 0$

c) $\dim(\mathcal{C}(\mathbf{A})) = 2$, $\dim(\mathcal{C}(\mathbf{AB})) = 2$.

Príklad Ď.3.11. Zapíšte maticu
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$
ako súčet troch matíc hodnosti 1.

Príklad Ď.3.12. Dokážte, že $\mathcal{N}(\mathbf{A}) = \mathcal{C}(\mathbf{A}^T)^\perp$. Formálne teda dotiahnite pozorovanie z prednášky. Návod: dokážte postupne $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{C}(\mathbf{A}^T)^\perp$ a $\mathcal{N}(\mathbf{A}) \supseteq \mathcal{C}(\mathbf{A}^T)^\perp$.

Príklad Ď.3.13. Nájdite všetky riešenia rovnice $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ pre
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}.$$

Príklad Ď.3.14 (na zamyslenie)**.** Sformulujte postačujúcu podmienku pre hodnosť $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times k}$, aby $\mathcal{C}(\mathbf{AB}) = \mathcal{C}(\mathbf{A})$ pre ľubovoľnú $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Teda "$\operatorname{rank}(\mathbf{B}) = \_\_$ zaručuje, že $\mathcal{C}(\mathbf{AB}) = \mathcal{C}(\mathbf{A})$". Tvrdenie môžete sformulovať napríklad pomocou geometrických úvah. Následne tvrdenie dokážte.

Príklad Ď.3.15. Nech
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 4 & 2 & 22 \\ 7 & -2 & 22 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 10 & 8 \\ 12 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Nájdite takú maticu $\mathbf{T}$, aby $\mathbf{A} = \mathbf{BT}$ bol $\mathbf{BT}$-rozklad matice $\mathbf{A}$ (a overte, že ste ozaj získali $\mathbf{BT}$-rozklad).

Príklad Ď.4.1. Nech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n - 2\mathbf{J}_{n\times n} & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{J}_{2\times n} & \mathbf{1}_2\mathbf{x}^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{x} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ spĺňa $\sum_i x_i = 0$ a $\|\mathbf{x}\| = 1$.

a) Určte rozmery $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$.

b) Vypočítajte $\mathbf{AB}$.

Príklad Ď.4.2. Nájdite **LU**-rozklad matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Príklad Ď.4.3. Nájdite **LU**-rozklad matice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -7 & -2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Príklad Ď.4.4. Nájdite **LU**-rozklad matice

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Pod ŁU-rozkladom obdĺžnikovej matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ rozumieme $\mathbf{A} = \text{Ł}\mathbf{U}$, kde $\text{Ł} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ je dolná trojuholníková a $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ je horná trojuholníková (teda $(\mathbf{U})_{ij} = 0$ pre všetky $i > j$).
b) Nájdite všetky riešenia systému $\mathbf{Cx} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{b} = (17, -7, 26)^T$.

Príklad Ď.4.5. Nájdite všetky riešenia rovníc

a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

b)
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 32 \end{pmatrix}.$$

Príklad Ď.4.6.

a) Nech
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 9 & 1 & 8 \\ 6 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

Nájdite **LU**-rozklad matice **A** a z tohto rozkladu skonštruujte **BT**-rozklad matice **A**.

b) Popíšte postup, ktorým z **LU**-rozkladu všeobecnej matice **A** (teda $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $\text{rank}(\mathbf{A}) = r$) vieme skonštruovať jej **BT**-rozklad.

Príklad Ď.5.1. Nech
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{U} \\ \mathbf{V} & \mathbf{W} \end{pmatrix},$$
$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = r$ a $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{r\times r}$ je regulárna. Potom $\mathbf{W} = \mathbf{V}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{U}$. Dokážte.

Príklad Ď.5.2. Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.

a) Predpokladajme, že $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ má riešenie. Vyjadrite potom jedno riešenie rovnice $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ pomocou ľavej/pravej inverzie.

b) Má $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ riešenie pre ľubovoľné také $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$? (Teda pre $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ spĺňajúce $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$ a $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$). Dokážte, alebo nájdite protipríklad.

Príklad Ď.5.3. Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je regulárna, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ a nech $1 - \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u} \neq 0$. Vyriešte systém
$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^T & 1 \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_n \\ \mathbf{0}_n^T \end{pmatrix}.$$

Príklad Ď.5.4. Vyriešte maticové rovnice (pod $\mathbf{J}_n$ sa myslí $\mathbf{J}_{n\times n}$):

a)
$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{J}_n \\ \mathbf{J}_n & \mathbf{I}_n + 2\mathbf{J}_n \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_n \\ 5\mathbf{J}_n \end{pmatrix}$$

b)
$$\begin{pmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{J}_n \\ \mathbf{J}_n & \mathbf{I}_n + 2\mathbf{J}_n \end{pmatrix} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}\mathbf{1}_n^T \\ (n+1)\mathbf{J}_n \end{pmatrix},$$
kde $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ spĺňa $\sum_{i=1}^n v_i^{-1} = 0$ a $\mathbf{D} = \operatorname{diag}(\mathbf{v})$.

Príklad Ď.5.5. Nech $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ má ortonormálne stĺpce a označme $\mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$. Ukážte, že $\mathbf{B}^2 = \mathbf{B}$ a $\mathbf{B}^T = \mathbf{B}$. (Pozn.: matica spĺňajúca tieto dve vlastnosti je projekčnou maticou na svoj stĺpcový priestor).

Príklad Ď.5.6. Nech $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ má ortonormálne stĺpce. Určte hodnosť $\mathbf{Q}$ a nájdite nejakú jej ľavú/pravú inverziu (ak niektorá z nich existuje).

Príklad Ď.5.7. Nech $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$, kde
$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Ukážte, že $\mathbf{A}$ sa dá zapísať ako súčet troch matíc (získaných z $\mathbf{L}$ a $\mathbf{U}$) hodnosti nanajvýš 1.

b) Ukážte, že $\mathbf{A}$ sa dá zapísať ako súčet dvoch matíc hodnosti 1 (získaných z $\mathbf{L}$ a $\mathbf{U}$).

Príklad Ď.5.8. Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ má hodnosť r a $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ je jej $\mathbf{LU}$-rozklad. Zovšeobecnite príklad Ď.5.7: vyjadrite (pomocou matíc $\mathbf{L}$ a $\mathbf{U}$) $\mathbf{A}$ ako súčet n matíc hodnosti nanajvýš 1 aj ako súčet r matíc hodnosti 1.

Príklad Ď.5.9 (na zamyslenie)**.** Nech p je priamka v $\mathbb{R}^2$, ktorá zviera s horizontálnou osou uhol θ (je otočená od x-ovej osi o θ proti smeru hodinových ručičiek). Nájdite maticu zodpovedajúcu osovej súmernosti okolo priamky p.

Príklad Ď.5.10. Nech
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Nájdite úzky **QR**-rozklad matice **A**.

b) Nájdite **QR**-rozklad matice **A**. (Návod: chýbajúci ortonormálny vektor sa dá získať napríklad Gram-Schmidtovou ortogonalizáciou, keď k matici **A** pridáme ešte jeden lineárne nezávislý stĺpec).

Príklad Ď.5.11. Nech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Nájdite úzky **QR**-rozklad matice **A**.

b) Nájdite **QR**-rozklad matice **A**.

Príklad Ď.5.12. Nech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & -16 \\ 4 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nájdite **QR**-rozklad matice **A**.

Príklad Ď.5.13. Nech $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$ sú lineárne nezávislé a nech výsledkom ich Gram-Schmidtovej ortogonalizácie sú $\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_k \in \mathbb{R}^n$. Dokážte, že $\mathbf{q}_i$ je kolmé na všetky $\mathbf{q}_j$ pre $j < i$. (Pomôcka: skúste tvrdenie najprv dokázať pre $\mathbf{q}_2$, potom pre $\mathbf{q}_3$ a potom pre všeobecné $\mathbf{q}_i$).

Príklad Ď.5.14. Nájdite permutačnú maticu **P**, pre ktorú platí

$$\mathbf{P}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \text{pre každé} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Určte tiež, na čo zobrazí vektor **x** matica $\mathbf{P}^{-1}$ (teda čomu je rovné $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$).

Príklad Ď.5.15. Vypočítajte normu nasledujúcich matíc

a) $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – ortogonálna,

b) $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times k}$ – s ortonormálnymi stĺpcami,

c) $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times k}$ – s ortonormálnymi riadkami.

Overte vaše výsledky na vami zvolenej matici typu 3×3 pre (a), 3×2 pre (b), a 2×3 pre (c).

Príklad Ď.5.16. Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ je permutačná matica. Určte $\|\mathbf{PA}\|$ pomocou $\|\mathbf{A}\|$.

Príklad Ď.5.17. Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ má hodnosť n a nech $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ je jej úzky **QR**-rozklad. Aký je vzťah medzi stĺpcovým (riadkovým, nulovým, ľavým nulovým) priestorom matice **A** a stĺpcovým (riadkovým, nulovým, ľavým nulovým) priestorom matice **Q**? Teda sformulujte čo najsilnejšie tvrdenia o týchto dvojiciach priestorov.

Príklad Ď.5.18. Nech **P** je permutačná $n \times n$ matica. Určte maximálnu a minimálnu hodnotu, ktorú môže nadobúdať $\mathrm{tr}(\mathbf{P})$. Pre $n = 2$, $n = 3$ a $n = 4$ určte všetky hodnoty, ktoré môže $\mathrm{tr}(\mathbf{P})$ nadobúdať.

Príklad Ď.5.19. a) Nech

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{P} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}.$$

Vypočítajte $\operatorname{tr}(\mathbf{P})$.

b) Nech $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ a $\mathbf{P} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^T}{\mathbf{a}^T\mathbf{a}}$. Vypočítajte $\operatorname{tr}(\mathbf{P})$.
(Taká matica $\mathbf{P}$ zodpovedá projekcii na priamku danú vektorom $\mathbf{a}$; viď projekcie pri odvodení Gram-Schmidta.)

Príklad Ď.5.20 (na zamyslenie)**.** Skúste sa vcítiť do role vyučujúceho, ktorý vymýšľa písomku: vymyslite postup, ako manuálne konštruovať matice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, aby ich $\mathbf{QR}$-rozklad bol "pekný" aj aby samotné matice $\mathbf{A}$ boli pekné (teda aby v $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ aj $\mathbf{A}$ vychádzali relatívne pekné čísla).

Príklad Ď.5.21. Nájdite dve ortogonálne matice, ktoré sú aj navzájom ortogonálne (teda ich skalárny súčin je nulový).

Príklad Ď.5.22. Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Nech $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ sú také matice, aby platilo $\mathcal{C}(\mathbf{X}) = \mathcal{C}(\mathbf{A})$ a $\mathcal{C}(\mathbf{Y}) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$ (napríklad stĺpce $\mathbf{X}$ môžu byť báza $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ a stĺpce $\mathbf{Y}$ báza $\mathcal{N}(\mathbf{A}^T)$). Vypočítajte $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle$. Keď to neviete vypočítať všeobecne, skúste to vypočítať najprv pre konkrétnu zvolenú maticu $\mathbf{A}$.

Príklad Ď.5.23. Nech

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Čo (geometricky) robí $\mathbf{P}_1$ s priestorom $\mathbb{R}^2$? Slovne teda popíšte príslušnú geometrickú transformáciu (otočenie/natiahnutie/...).

b) Podobne pre $\mathbf{P}_2$.

c) Skúste geometricky charakterizovať každú 3×3 permutačnú maticu.

Príklad Ď.6.1. Nech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Nájdite všetky zovšeobecnené inverzie matice $\mathbf{A}$ vyriešením rovnice $\mathbf{AGA} = \mathbf{A}$. Aký geometrický útvar v priestore $\mathbb{R}^{2\times 2}$ je získaná množina?

Príklad Ď.6.2. Nech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -10 & -2 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1/5 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Nájdite a vykreslite všetky štyri fundamentálne priestory matice $\mathbf{A}$.

b) Overte, že $\mathbf{B} \in \mathcal{G}^-(\mathbf{A})$.

c) Overte a graficky znázornite, že pre každé $\mathbf{y} \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$ platí $\mathbf{ABy} = \mathbf{y}$: pre všeobecné $\mathbf{y} \in \mathcal{C}(\mathbf{A})$ vypočítajte $\mathbf{By}$ a $\mathbf{ABy}$; zakreslite to tiež do obrázku z časti a).

Príklad Ď.6.3. Nájdite zovšeobecnenú inverziu matice $\mathbf{J}_{m\times n}$ v tvare $c\mathbf{J}_{n\times m}$ pre vhodne zvolené $c \in \mathbb{R}$.

Príklad Ď.6.4. Nájdite aspoň jednu zovšeobecnenú inverziu matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Príklad Ď.6.5. Ukážte, že matica nájdená v príklade Ď.6.3 je pseudoinverziou matice $\mathbf{J}_{m\times n}$.

Príklad Ď.6.6. Nájdite pseudoinverziu matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a overte, že ste ozaj našli pseudoinverziu.

Príklad Ď.6.7 (na zamyslenie)**.** Nech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nájdite $\mathbf{A}^+$ (tipnutím, geometrickými úvahami, vzťahom s lin. rovnicami, postupným riešením definičných rovníc pseudoinverzie, minimalizovaním normy...) a overte, že získaná matica ozaj spĺňa definíciu pseudoinverzie.

Príklad Ď.6.8. Nech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Nájdite jednu $\mathbf{A}^-$ a pomocou nej nájdite jedno riešenie $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ aj všetky riešenia $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

b) Overte, že a) sa zhoduje s jedným aj so všetkými riešeniami nájdenými "klasickou metódou" (napr. elimináciou).

c) Nájdite (vykreslením / analytickým vyriešením) také $\mathbf{x}^*$, ktoré má spomedzi všetkých riešení systému $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ najmenšiu normu.

d) Porovnajte $\mathbf{x}^*$ získané z c) s riešením pomocou pseudoinverzie $\mathbf{x} = \mathbf{A}^+\mathbf{b}$ (matica $\mathbf{A}^+$ je v Úlohe 6.10 v skriptách).

Príklad Ď.6.9. Spravte to isté, čo v príklade Ď.6.8, pre

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Môžete použiť:

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Príklad Ď.6.10. Nech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Nájdite všetky zovšeobecnené inverzie matice $\mathbf{A}$. Následne pomocou minimalizácie normy $\|\mathbf{A}^-\|$ nájdite $\mathbf{A}^+$. Overte, že získaná matica spĺňa vlastnosti pseudoinverzie.

Príklad Ď.6.11. Nech $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ má ortonormálne stĺpce. Nájdite $\mathbf{Q}^+$.

Príklad Ď.6.12. Nech
$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 18 \\ 10 \end{pmatrix}$$

a) Nájdite zovšeobecnenú inverziu matice $\mathbf{D}$.

b) Určte, či je systém $\mathbf{Dx} = \mathbf{b}$ konzistentný.

c) Nájdite jedno riešenie systému $\mathbf{Dx} = \mathbf{b}$ (ak je konzistentný).

Ak ste v (b), (c) použili iný postup, vyriešte to aj pomocou matice $\mathbf{D}^-$ z časti (a).

Príklad Ď.7.1. Nech $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ má hodnosť n a nech $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ je jej úzky $\mathbf{QR}$ rozklad.

a) Určte rank($\mathbf{R}$).

b) Vyjadrite projekčnú maticu na $\mathcal{C}(\mathbf{A})$ pomocou $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{R}$. Upravte na najjednoduchší možný tvar.

Príklad Ď.7.2. Nech $\mathbf{P}$ je projekčná matica. Vyjadrite $\|\mathbf{P}\|$ pomocou hodnosti $\mathbf{P}$.

Príklad Ď.7.3. Nech
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{n\times 2} \\ \mathbf{I}_2 \end{pmatrix}.$$

Vypočítajte $\mathbf{P}_{\mathbf{A}}$.

Príklad Ď.7.4. a) Nájdite zovšeobecnenú inverziu matice $n\mathbf{J}_{n\times n}$ v tvare $c\mathbf{J}_{n\times n}$ pre vhodne zvolené c.

b) Nech $\mathbf{A} = \mathbf{J}_{n\times n}$. Vypočítajte $\mathbf{P}_{\mathbf{A}}$.

c) Nech
$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{n\times n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n \end{pmatrix}.$$

Vypočítajte $\mathbf{P}_{\mathbf{B}}$. Pomôcka: Jedna zovšeobecnená inverzia blokovo diagonálnej matice v tvare
$$\begin{pmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y} \end{pmatrix}$$
je
$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}^- & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y}^- \end{pmatrix}.$$

Príklad Ď.7.5. Nech
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

a) Určte, či je systém $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ riešiteľný.

b) Nájdite všetky $\mathbf{x}$, ktoré sú najbližšie k riešeniu, teda vyriešte problém najmenších štvorcov pre tieto $\mathbf{A}$ a $\mathbf{b}$.

c) Vypočítajte $\mathbf{Ax}$ pre každé $\mathbf{x}$ z b).

d) Nájdite aj jedno riešenie problému najmenších štvorcov pomocou pseudoinverzie. (Vieme, že
$$\mathbf{A}^+ = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}.)$$

Je riešenie získané pomocou pseudoinverzie niečím špeciálne?

e) Situáciu vykreslite.

Príklad Ď.7.6. Spravte to isté, čo v príklade Ď.7.5, pre

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Môžete použiť:

$$\mathbf{A}^+ = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Príklad Ď.7.7. Ukážte, že $\mathcal{C}(\mathbf{P_A}) = \mathcal{C}(\mathbf{A})$ pre ľubovoľnú $\mathbf{A}$.

Príklad Ď.7.8. Ukážte, že $\mathbf{I} - \mathbf{P_A}$ je symetrická a idempotentná.

Príklad Ď.7.9. Nech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Vyriešte problém najmenších štvorcov $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\| \to \min$, teda nájdite všetky riešenia tohto problému. Vypočítajte aj optimálne $\mathbf{Ax}$. Situáciu vykreslite.

b) To isté zopakujte pre $\|\mathbf{Cx} - \mathbf{b}\| \to \min$

c) Porovnajte časti (a) a (b).

Príklad Ď.8.1. Odvoďte vzorec pre determinant 3×3 matice. (Všimnite si, že je to výrazne zdĺhavejšie ako pre 2×2 maticu – kvôli tomu, že počet permutácií "veľmi rýchlo" rastie s rastúcim n.)

Príklad Ď.8.2. Z definície determinantu dokážte, že determinant hornej trojúholníkovej matice je súčin prvkov na jej diagonále. Ak to neviete dokázať pre $n \times n$ maticu, skúste začať s dôkazom pre 3×3 maticu.

Príklad Ď.9.1. Nech $\mathbf{A} \in \mathcal{S}^n_+$ a $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}_{n \times n}$. Ukážte, že potom $\mathrm{tr}(\mathbf{A}) > 0$.

Príklad Ď.9.2. Ukážte, že ak všetky vlastné čísla matice $\mathbf{A} \in \mathcal{S}^n$ sú nezáporné, potom $\mathbf{A} \in \mathcal{S}^n_+$. Pomôcka: môžete skúsiť použiť spektrálny rozklad.

Príklad Ď.9.3. Nech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -9/5 & -12/5 \\ -12/5 & 9/5 \end{pmatrix}.$$

Vypočítajte $\mathbf{A}^{23}$.

Príklad Ď.9.4. Nech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vypočítajte $\mathbf{A}^{34}$.

Príklad Ď.9.5. Ukážte, že ak $\mathbf{A} = \mathbf{Q\Lambda Q}^T$, kde $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je diagonálna a $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je ortogonálna, potom

a) $\mathbf{A}$ je symetrická,

b) stĺpce matice $\mathbf{Q}$ sú vlastné vektory matice $\mathbf{A}$,

c) diagonálne prvky matice $\mathbf{\Lambda}$ sú príslušné vlastné hodnoty $\mathbf{A}$.

(Toto je teda “opačné” tvrdenie k spektrálnemu rozkladu.)

Príklad Ď.9.6. a) Nájdite singulárny rozklad matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

b) Nájdite $\mathbf{A}^+$.

Príklad Ď.9.7. Nech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Nájdite singulárny rozklad matice $\mathbf{A}$.

b) Nájdite $\mathbf{A}^+$.

Príklad Ď.9.8. Nech

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Nájdite singulárny rozklad matice $\mathbf{A}$ aj jej úzky singulárny rozklad.

b) Overte, že získané matice ozaj majú požadované vlastnosti.

c) Nájdite $\mathbf{A}^+$.